# 2019年上海市中考数学试卷

**参考答案与试题解析**

**一、选择题：（本大题共6题.每题4分，满分24【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】**

1．（4分）下列运算正确的是（　　）

A．$3x+2x=5x^2$　　B．$3x-2x=x$　　C．$3x\cdot 2x=6x$　　D．$3x\div 2x=\frac{2}{3}$

【考点】整式的混合运算．

【分析】根据整式的运算法则即可求出答案．

【解答】解：（$A$）原式$=5x$，故$A$错误；

（$C$）原式$=6x^2$，故$C$错误；

（$D$）原式$=\frac{3}{2}$，故$D$错误；

故选：$B$．

【点评】本题考查整式的运算，解题的关键是熟练运用整式的运算法则，本题属于基础题型．

2．（4分）如果$m>n$，那么下列结论错误的是（　　）

A．$m+2>n+2$　　B．$m-2>n-2$　　C．$2m>2n$　　D．$-2m>-2n$

【考点】不等式的性质．

【分析】根据不等式的性质即可求出答案．

【解答】解：∵$m>n$，

∴$-2m<-2n$，

故选：$D$．

【点评】本题考查不等式的性质，解题的关键是熟练运用不等式的性质，本题属于基础题型．

3．（4分）下列函数中，函数值$y$随自变量$x$的值增大而增大的是（　　）

A．$y=\frac{x}{3}$　　B．$y=-\frac{x}{3}$　　C．$y=\frac{3}{x}$　　D．$y=-\frac{3}{x}$

【考点】正比例函数的性质；G4：反比例函数的性质．

【分析】一次函数当 $a>0$ 时，函数值 $y$ 总是随自变量 $x$ 增大而增大，反比例函数当 $k<0$ 时，在每一个象限内，$y$ 随自变量 $x$ 增大而增大．

【解答】解：*A*、该函数图象是直线，位于第一、三象限，$y$ 随 $x$ 的增大而增大，故本选项正确．

*B*、该函数图象是直线，位于第二、四象限，$y$ 随 $x$ 的增大而减小，故本选项错误．

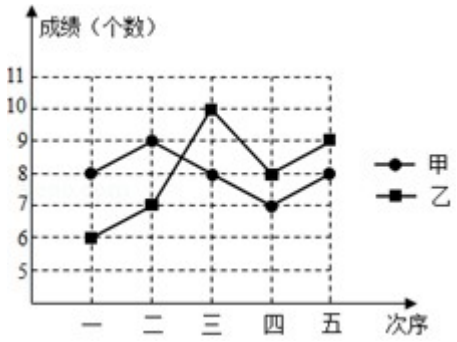
*C*、该函数图象是双曲线，位于第一、三象限，在每一象限内，$y$ 随 $x$ 的增大而减小，故本选项错误．

*D*、该函数图象是双曲线，位于第二、四象限，在每一象限内，$y$ 随 $x$ 的增大而增大，故本选项错误．

故选：*A*．

【点评】本题考查了一次函数、反比例函数的增减性；熟练掌握一次函数、反比例函数的性质是关键．

4．（4 分）甲、乙两名同学本学期五次引体向上的测试成绩（个数）成绩如图所示，下列判断正确的是（　　）




A．甲的成绩比乙稳定

B．甲的最好成绩比乙高

C．甲的成绩的平均数比乙大

D．甲的成绩的中位数比乙大

【考点】算术平均数；W4：中位数；W7：方差．

【分析】分别计算出两人成绩的平均数、中位数、方差可得出答案．

【解答】解：甲同学的成绩依次为：7、8、8、8、9，

则其中位数为 8，平均数为 8，方差为$\frac{1}{5}$×[（7－8）$^2$+3×（8－8）$^2$+（9－8）$^2$]＝0.4；

乙同学的成绩依次为：6、7、8、9、10，

则其中位数为 8，平均数为 8，方差为$\frac{1}{5}$×[（6－8）$^2$+（7－8）$^2$+（8－8）$^2$+（9－8）$^2$+（10－8）$^2$]＝2，

∴甲的成绩比乙稳定，甲、乙的平均成绩和中位数均相等，甲的最好成绩比乙低，

故选：*A*．

【点评】本题考查了方差是反映一组数据的波动大小的一个量．方差越大，则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程度越小，稳定性越好．也考查了中位数．

5．（4 分）下列命题中，假命题是（　　）

A．矩形的对角线相等

B．矩形对角线交点到四个顶点的距离相等

C．矩形的对角线互相平分

D．矩形对角线交点到四条边的距离相等

【考点】命题与定理．

【分析】利用矩形的性质分别判断后即可确定正确的选项．

【解答】解：*A*、矩形的对角线相等，正确，是真命题；

*B*、矩形的对角线的交点到四个顶点的距离相等，正确，是真命题；

*C*、矩形的对角线互相平分，正确，是真命题；

*D*、矩形的对角线的交点到一组对边的距离相等，故错误，是假命题，

故选：*D*．

【点评】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解矩形的性质，难度不大．

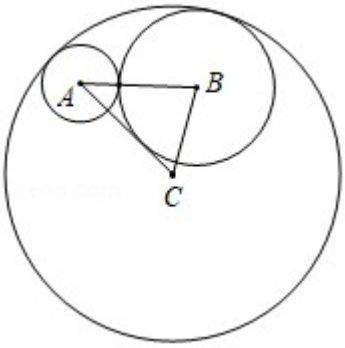
6．（4 分）已知⊙*A* 与⊙*B* 外切，⊙*C* 与⊙*A*、⊙*B* 都内切，且 *AB*＝5，*AC*＝6，*BC*＝7，那么⊙*C* 的半径长是（　　）

A．11　　B．10　　C．9　　D．8

【考点】圆与圆的位置关系．

【分析】如图，设⊙*A*，⊙*B*，⊙*C* 的半径为 *x*，*y*，*z*．构建方程组即可解决问题．

【解答】解：如图，设⊙*A*，⊙*B*，⊙*C* 的半径为 *x*，*y*，*z*．




由题意：$\begin{cases}x+y=5\\z-x=6\\z-y=7\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=3\\y=2\\z=9\end{cases}$，

故选：$C$．

【点评】本题考查两圆的位置关系，解题的关键是学会利用参数构建方程组解决问题，属于中考常考题型．

**二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答纸的相应位置上】**

7．（4 分）计算：$(2a^2)^2=$ $4a^4$ ．

【考点】幂的乘方与积的乘方．

【分析】根据积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，计算即可．

【解答】解：$(2a^2)^2=2^2a^4=4a^4$．

【点评】主要考查积的乘方的性质，熟练掌握运算性质是解题的关键．

8．（4 分）已知 $f(x)=x^2-1$，那么 $f(-1)=$ $0$ ．

【考点】函数值．

【分析】根据自变量与函数值的对应关系，可得答案．

【解答】解：当 $x=-1$ 时，$f(-1)=(-1)^2-1=0$．

故答案为：0．

【点评】本题考查了函数值，把自变量的值代入函数解析式是解题关键．

9．（4 分）如果一个正方形的面积是 3，那么它的边长是 $\sqrt{3}$ ．

【考点】算术平方根．

【分析】根据算术平方根的定义解答．

【解答】解：∵正方形的面积是3，

∴它的边长是$\sqrt{3}$．

故答案为：$\sqrt{3}$

【点评】本题考查了二次根式的应用，主要利用了正方形的性质和算术平方根的定义．

10．（4分）如果关于$x$的方程$x^2-x+m=0$没有实数根，那么实数$m$的取值范围是__$m>\frac{1}{4}$__．

【考点】根的判别式．

【分析】由于方程没有实数根，则其判别式△＜0，由此可以建立关于$m$的不等式，解不等式即可求出$m$的取值范围．

【解答】解：由题意知△＝$1-4m<0$，

∴$m>\frac{1}{4}$．

故填空答案：$m>\frac{1}{4}$．

【点评】总结：一元二次方程根的情况与判别式△的关系：

（1）△＞0⇔方程有两个不相等的实数根；

（2）△＝0⇔方程有两个相等的实数根

（3）△＜0⇔方程没有实数根．

11．（4分）一枚材质均匀的骰子，六个面的点数分别是1，2，3，4，5，6，投这个骰子，掷的点数大于4的概率是__$\frac{1}{3}$__．

【考点】列表法与树状图法．

【分析】先求出点数大于4的数，再根据概率公式求解即可．

【解答】解：∵在这6种情况中，掷的点数大于4的有2种结果，

∴掷的点数大于4的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$．

【点评】本题考查的是概率公式，熟记随机事件 $A$ 的概率 $P$（$A$）＝事件 $A$ 可能出现的结果数所有可能出现的结果数的商是解答此题的关键．

12．（4 分）《九章算术》中有一道题的条件是：“今有大器五一容三斛，大器一小器五容二斛．”大致意思是：有大小两种盛米的桶，5 大桶加 1 小桶共盛 3 斛米，1 大桶加 5 小桶共盛 2 斛米，依据该条件，1 大桶加 1 小桶共盛__$\frac{5}{6}$__斛米．（注：斛是古代一种容量单位）

【考点】二元一次方程组的应用．

【分析】直接利用 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛米 3 斛，1 个大桶加上 5 个小桶可以盛米 2 斛，分别得出等式组成方程组求出答案．

【解答】解：设 1 个大桶可以盛米 $x$ 斛，1 个小桶可以盛米 $y$ 斛，

则$\begin{cases}5x+y=3\\x+5y=2\end{cases}$，

故 $5x+x+y+5y=5$，

则 $x+y=\frac{5}{6}$．

答：1 大桶加 1 小桶共盛$\frac{5}{6}$斛米．

故答案为：$\frac{5}{6}$．

【点评】此题主要考查了二元一次方程组的应用，正确得出等量关系是解题关键．

13．（4 分）在登山过程中，海拔每升高 1 千米，气温下降 6℃，已知某登山大本营所在的位置的气温是 2℃，登山队员从大本营出发登山，当海拔升高 $x$ 千米时，所在位置的气温是 $y$℃，那么 $y$ 关于 $x$ 的函数解析式是__$y=-6x+2$__．

【考点】函数关系式．

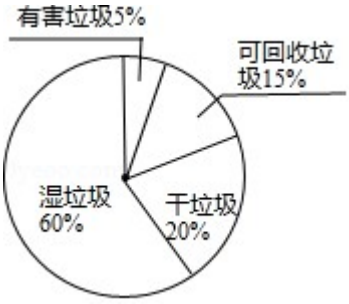
【分析】根据登山队大本营所在地的气温为 2℃，海拔每升高 1$km$ 气温下降 6℃，可求出 $y$ 与 $x$ 的关系式．

【解答】解：由题意得 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式为：$y=-6x+2$．

故答案为：$y=-6x+2$．

【点评】本题考查根据实际问题列一次函数式，关键知道气温随着高度变化，某处的气温＝地面的气温－降低的气温．

14．（4分）小明为了解所在小区居民各类生活垃圾的投放情况，他随机调查了该小区50户家庭某一天各类生活垃圾的投放量，统计得出这50户家庭各类生活垃圾的投放总量是100千克，并画出各类生活垃圾投放量分布情况的扇形图（如图所示），根据以上信息，估计该小区300户居民这一天投放的可回收垃圾共约__90__千克．




【考点】用样本估计总体；VB：扇形统计图．

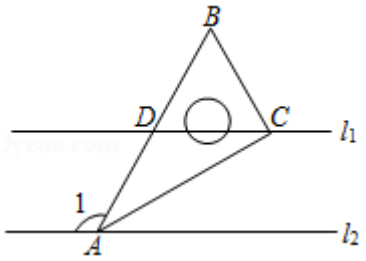
【分析】求出样本中100千克垃圾中可回收垃圾的质量，再乘以$\frac{300}{50}$可得答案．

【解答】解：估计该小区300户居民这一天投放的可回收垃圾共约$\frac{300}{50}$×100×15%＝90（千克），

故答案为：90．

【点评】本题主要考查扇形统计图，扇形统计图是用整个圆表示总数用圆内各个扇形的大小表示各部分数量占总数的百分数．也考查了用样本估计总体．

15．（4分）如图，已知直线$1_1 // l_2$，含30°角的三角板的直角顶点$C$在$l_1$上，30°角的顶点$A$在$l_2$上，如果边$AB$与$l_1$的交点$D$是$AB$的中点，那么∠1＝__120__度．




【考点】平行线的性质；KP：直角三角形斜边上的中线．

【分析】根据直角三角形斜边上的中线性质得到$DA＝DC$，则$∠DCA＝∠DAC＝30°$，再利用三角形外角性质得到∠2＝60°，然后根据平行线的性质求∠1的度数．

【解答】解：∵$D$是斜边$AB$的中点，

∴$DA=DC$，

∴$\angle DCA=\angle DAC=30°$，

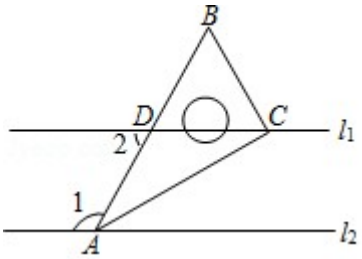
∴$\angle 2=\angle DCA+\angle DAC=60°$，

∵$1_1 /\!/ l_2$，

∴$\angle 1+\angle 2=180°$，

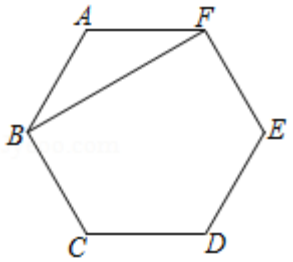
∴$\angle 1=180°-60°=120°$．

故答案为 120．




【点评】本题考查了直接三角形斜边上的中线：在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半（即直角三角形的外心位于斜边的中点）．也考查了平行线的性质．

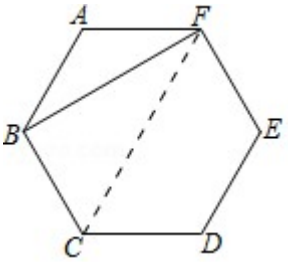
16．（4 分）如图，在正边形 $ABCDEF$ 中，设 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BF}$ 用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示为__$2\vec{a}\pm\vec{b}$__．




【考点】平面向量．

【分析】连接 $CF$．利用三角形法则：$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$，求出 $\overrightarrow{CF}$ 即可．

【解答】解：连接 $CF$．




∵多边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

$AB \parallel CF$，$CF=2BA$，

$\therefore \overrightarrow{CF}=2\vec{a}$，

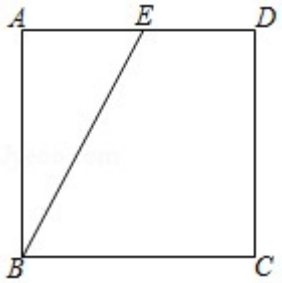
$\because \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$，

$\therefore \overrightarrow{BF}=2\vec{a}+\vec{b}$，

故答案为 $2\vec{a}+\vec{b}$.

【点评】本题考查平面向量，正六边形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握三角形法则，属于中考常考题型.

17．（4 分）如图，在正方形 $ABCD$ 中，$E$ 是边 $AD$ 的中点．将△$ABE$ 沿直线 $BE$ 翻折，点 $A$ 落在点 $F$ 处，联结 $DF$，那么∠$EDF$ 的正切值是 2 ．




【考点】正方形的性质；PB：翻折变换（折叠问题）；T7：解直角三角形.

【分析】由折叠可得 $AE=FE$，$\angle AEB=\angle FEB$，由折叠的性质以及三角形外角性质，即可得到$\angle AEB=\angle EDF$，进而得到 $\tan\angle EDF=\tan\angle AEB=\frac{AB}{AE}=2$.

【解答】解：如图所示，由折叠可得 $AE=FE$，$\angle AEB=\angle FEB=\frac{1}{2}\angle AEF$，

$\because$正方形 $ABCD$ 中，$E$ 是 $AD$ 的中点，

$\therefore AE=DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore DE=FE$，

$\therefore \angle EDF=\angle EFD$，

又$\because \angle AEF$ 是△$DEF$ 的外角，

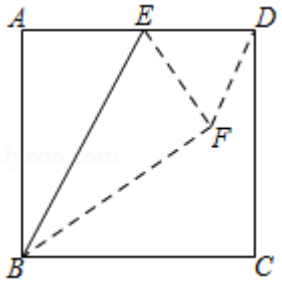
$\therefore \angle AEF=\angle EDF+\angle EFD$，

$\therefore \angle EDF=\frac{1}{2}\angle AEF$，

$\therefore \angle AEB=\angle EDF$，

∴$\tan\angle EDF=\tan\angle AEB=\frac{AB}{AE}=2$．

故答案为：2．




【点评】本题主要考查了折叠问题，折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等．

18．（4分）在△$ABC$和△$A_1B_1C_1$中，已知$\angle C=\angle C_1=90°$，$AC=A_1C_1=3$，$BC=4$，$B_1C_1=2$，点$D$、$D_1$分别在边$AB$、$A_1B_1$上，且△$ACD\cong$△$C_1A_1D_1$，那么$AD$的长是__$\frac{5}{3}$__．

【考点】全等三角形的性质．

【分析】根据勾股定理求得$AB=5$，设$AD=x$，则$BD=5-x$，根据全等三角形的性质得出$C_1D_1=AD=x$，$\angle A_1C_1D_1=\angle A$，$\angle A_1D_1C_1=\angle CDA$，即可求得$\angle C_1D_1B_1=\angle BDC$，根据等角的余角相等求得$\angle B_1C_1D_1=\angle B$，即可证得△$C_1B_1D\backsim$△$BCD$，根据其性质得出$\frac{5-x}{x}=2$，解得求出$AD$的长．

【解答】解：如图，∵在△$ABC$和△$A_1B_1C_1$中，$\angle C=\angle C_1=90°$，$AC=A_1C_1=3$，$BC=4$，$B_1C_1=2$，

∴$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

设$AD=x$，则$BD=5-x$，

∵△$ACD\cong$△$C_1A_1D_1$，

∴$C_1D_1=AD=x$，$\angle A_1C_1D_1=\angle A$，$\angle A_1D_1C_1=\angle CDA$，

∴$\angle C_1D_1B_1=\angle BDC$，

∵$\angle B=90°-\angle A$，$\angle B_1C_1D_1=90°-\angle A_1C_1D_1$，

∴$\angle B_1C_1D_1=\angle B$，

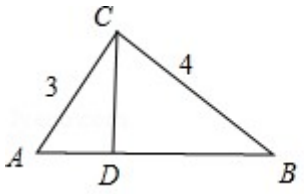
∴△$C_1B_1D\backsim$△$BCD$，

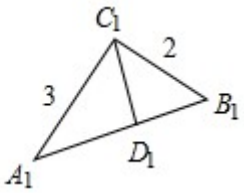
$\therefore \frac{BD}{C_1D_1}=\frac{BC}{C_1B_1}$，即$\frac{5-x}{x}=2$，

解得$x=\frac{5}{3}$，

$\therefore AD$的长为$\frac{5}{3}$，

故答案为$\frac{5}{3}$.




【点评】本题考查了全等三角形的性质，勾股定理的应用，三角形相似的判定和性质，证得$\triangle C_1B_1D\backsim\triangle BCD$是解题的关键.

**三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）**

19．（10 分）计算：$|\sqrt{3}-1|-\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}-8\frac{2}{3}$

【考点】实数的运算；2F：分数指数幂.

【分析】首先计算乘方，然后计算乘法，最后从左向右依次计算，求出算式的值是多少即可.

【解答】解：$|\sqrt{3}-1|-\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}-8\frac{2}{3}$

$=\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-4$

$=-3$

【点评】此题主要考查了实数的运算，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：在进行实数运算时，和有理数运算一样，要从高级到低级，即先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，有括号的要先算括号里面的，同级运算要按照从左到右的顺序进行．另外，有理数的运算律在实数范围内仍然适用.

20．（10 分）解方程：$\frac{2x}{x-2}-\frac{8}{x^2-2x}=1$

【考点】解分式方程.

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到$x$的值，经检验即可

得到分式方程的解．

【解答】解：去分母得：$2x^2-8=x^2-2x$，即 $x^2+2x-8=0$，

分解因式得：$(x-2)(x+4)=0$，

解得：$x=2$ 或 $x=-4$，

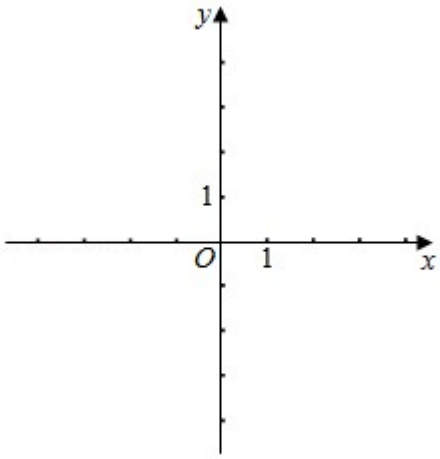
经检验 $x=2$ 是增根，分式方程的解为 $x=-4$．

【点评】此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验．

21．（10 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中（如图），已知一次函数的图象平行于直线 $y=\frac{1}{2}x$，且经过点 $A$（2，3），与 $x$ 轴交于点 $B$．

（1）求这个一次函数的解析式；

（2）设点 $C$ 在 $y$ 轴上，当 $AC=BC$ 时，求点 $C$ 的坐标．




【考点】FA：待定系数法求一次函数解析式；FF：两条直线相交或平行问题．

【分析】（1）设一次函数的解析式为 $y=kx+b$，解方程即可得到结论；

（2）求得一次函数的图形与 $x$ 轴的解得为 $B$（$-4$，0），根据两点间的距离公式即可得到结论．

【解答】解：（1）设一次函数的解析式为：$y=kx+b$，

∵一次函数的图象平行于直线 $y=\frac{1}{2}x$，

∴$k=\frac{1}{2}$，

∵一次函数的图象经过点 $A$（2，3），

∴$3=\frac{1}{2}\times 2+b$，

∴$b=2$，

∴一次函数的解析式为$y=\frac{1}{2}x+2$；

（2）由$y=\frac{1}{2}x+2$，令$y=0$，得$\frac{1}{2}x+2=0$，

∴$x=-4$，

∴一次函数的图形与$x$轴的解得为$B$（$-4$，$0$），

∵点$C$在$y$轴上，

∴设点$C$的坐标为（$-4$，$y$），

∵$AC=BC$，

∴$\sqrt{(2-0)^2+(3-y)^2}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-y)^2}$，

∴$y=-\frac{1}{2}$，

经检验：$y=-\frac{1}{2}$是原方程的根，

∴点$C$的坐标是（$0$，$-\frac{1}{2}$）．

【点评】本题考查了两直线相交与平行问题，待定系数法求函数的解析式，正确的理解题意是解题的关键．

22．（10分）图1是某小型汽车的侧面示意图，其中矩形$ABCD$表示该车的后备箱，在打开后备箱的过程中，箱盖$ADE$可以绕点$A$逆时针方向旋转，当旋转角为60°时，箱盖$ADE$落在$AD'E'$的位置（如图2所示）．已知$AD=90$厘米，$DE=30$厘米，$EC=40$厘米．

（1）求点$D'$到$BC$的距离；

（2）求$E$、$E'$两点的距离．

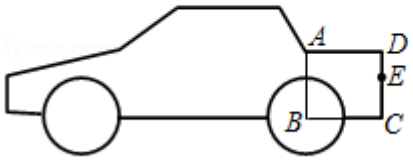



图 1

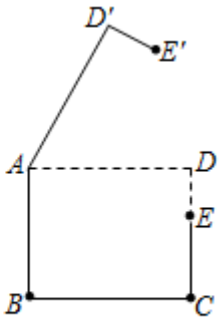



图 2

【考点】矩形的性质；T8：解直角三角形的应用．

【分析】（1）过点 $D'$ 作 $D'H\perp BC$，垂足为点 $H$，交 $AD$ 于点 $F$，利用旋转的性质可得出 $AD'=AD=90$ 厘米，$\angle DAD'=60°$，利用矩形的性质可得出 $\angle AFD'=\angle BHD'=90°$，在 Rt$\triangle AD'F$ 中，通过解直角三角形可求出 $D'F$ 的长，结合 $FH=DC=DE+CE$ 及 $D'H=D'F+FH$ 可求出点 $D'$ 到 $BC$ 的距离；

（2）连接 $AE$，$AE'$，$EE'$，利用旋转的性质可得出 $AE'=AE$，$\angle EAE'=60°$，进而可得出 $\triangle AEE'$ 是等边三角形，利用等边三角形的性质可得出 $EE'=AE$，在 Rt$\triangle ADE$ 中，利用勾股定理可求出 $AE$ 的长度，结合 $EE'=AE$ 可得出 $E$、$E'$ 两点的距离．

【解答】解：（1）过点 $D'$ 作 $D'H\perp BC$，垂足为点 $H$，交 $AD$ 于点 $F$，如图 3 所示．

由题意，得：$AD'=AD=90$ 厘米，$\angle DAD'=60°$．

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD\parallel BC$，

∴$\angle AFD'=\angle BHD'=90°$．

在 Rt$\triangle AD'F$ 中，$D'F=AD'\cdot\sin\angle DAD'=90\times\sin60°=45\sqrt{3}$ 厘米．

又∵$CE=40$ 厘米，$DE=30$ 厘米，

∴$FH=DC=DE+CE=70$ 厘米，

∴$D'H=D'F+FH=$（$45\sqrt{3}+70$）厘米．

答：点 $D'$ 到 $BC$ 的距离为（$45\sqrt{3}+70$）厘米．

（2）连接 $AE$，$AE'$，$EE'$，如图 4 所示．

由题意，得：$AE'=AE$，$\angle EAE'=60°$，

∴$\triangle AEE'$ 是等边三角形，

∴$EE'=AE$．

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle ADE=90°$．

在 Rt△$ADE$ 中，$AD=90$ 厘米，$DE=30$ 厘米，

∴$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=30\sqrt{10}$厘米，

∴$EE'=30\sqrt{10}$厘米．

答：$E$、$E'$两点的距离是 $30\sqrt{10}$厘米．

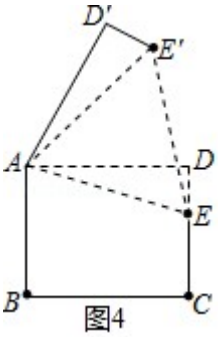


图4

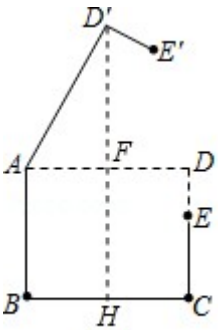


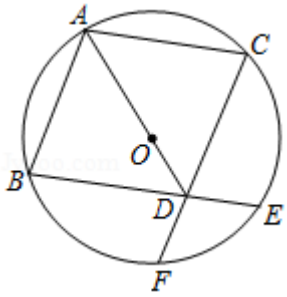
图3

【点评】本题考查了解直角三角形的应用、矩形的性质、等边三角形的判定与性质以及勾股定理，解题的关键是：（1）通过解直角三角形求出 $D'F$ 的长度；（2）利用勾股定理求出 $AE$ 的长度．

23．（12 分）已知：如图，$AB$、$AC$ 是⊙$O$ 的两条弦，且 $AB=AC$，$D$ 是 $AO$ 延长线上一点，联结 $BD$ 并延长交⊙$O$ 于点 $E$，联结 $CD$ 并延长交⊙$O$ 于点 $F$．

（1）求证：$BD=CD$；

（2）如果 $AB^2=AO\cdot AD$，求证：四边形 $ABDC$ 是菱形．




【考点】菱形的判定；M4：圆心角、弧、弦的关系；M5：圆周角定理；S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】（1）连接 $BC$，根据 $AB=AC$，$OB=OA=OC$，即可得出 $AD$ 垂直平分 $BC$，根据线段垂直平分线性质求出即可；

（2）根据相似三角形的性质和判定求出 $\angle ABO=\angle ADB=\angle BAO$，求出 $BD=AB$，再根据菱形的判定推出即可．

【解答】证明：（1）如图 1，连接 $BC$，$OB$，$OC$，

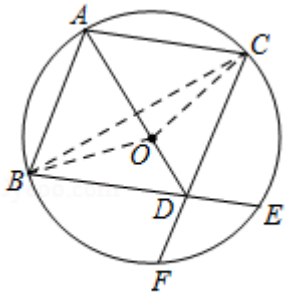



图1

∵$AB$、$AC$ 是⊙$O$ 的两条弦，且 $AB=AC$，

∴$A$ 在 $BC$ 的垂直平分线上，

∵$OB=OA=OC$，

∴$O$ 在 $BC$ 的垂直平分线上，

∴$AO$ 垂直平分 $BC$，

∴$BD=CD$；

（2）如图 2，连接 $OB$，

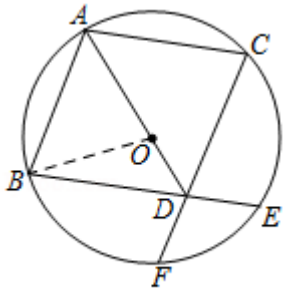


图2

∵$AB^2=AO\cdot AD$，

∴$\frac{AB}{AO}=\frac{AD}{AB}$，

∵$\angle BAO=\angle DAB$，

∴$\triangle ABO\backsim\triangle ADB$，

∴$\angle OBA=\angle ADB$，

∵$OA=OB$，

∴$\angle OBA=\angle OAB$，

∴$\angle OAB=\angle BDA$，

∴$AB=BD$，

∵$AB=AC$，$BD=CD$，

∴$AB=AC=BD=CD$，

∴四边形 $ABDC$ 是菱形．

【点评】本题考查了相似三角形的性质和判定，圆心角、弧、弦之间的关系，线段垂直平分线的性质，菱形的判定，垂径定理等知识点，能综合运用知识点进行推理是解此题的关键．

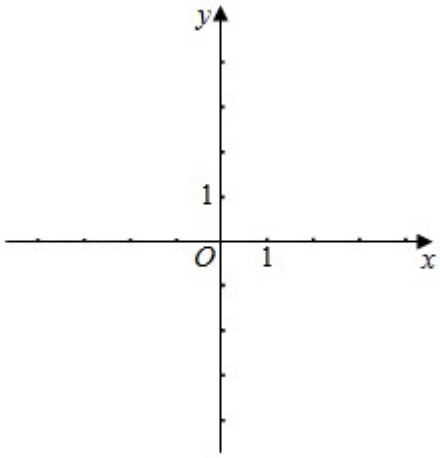
24．（12 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中（如图），已知抛物线 $y=x^2-2x$，其顶点为 $A$．

（1）写出这条抛物线的开口方向、顶点 $A$ 的坐标，并说明它的变化情况；

（2）我们把一条抛物线上横坐标与纵坐标相等的点叫做这条抛物线的“不动点”．

① 试求抛物线 $y=x^2-2x$ 的“不动点”的坐标；

② 平移抛物线 $y=x^2-2x$，使所得新抛物线的顶点 $B$ 是该抛物线的“不动点”，其对称轴与 $x$ 轴交于点 $C$，且四边形 $OABC$ 是梯形，求新抛物线的表达式．




【考点】二次函数综合题．

【分析】（1）∵$a=1>0$，故该抛物线开口向上，顶点$A$的坐标为（1，－1）；

（2）①设抛物线“不动点”坐标为（$t$，$t$），则$t=t^2-2t$，即可求解；②新抛物线顶点$B$为“不动点”，则设点$B$（$m$，$m$），则新抛物线的对称轴为：$x=m$，与$x$轴的交点$C$（$m$，0），四边形$OABC$是梯形，则直线$x=m$在$y$轴左侧，而点$A$（1，－1），点$B$（$m$，$m$），则$m=-1$，即可求解．

【解答】解：（1）∵$a=1>0$，

故该抛物线开口向上，顶点$A$的坐标为（1，－1）；

（2）①设抛物线“不动点”坐标为（$t$，$t$），则$t=t^2-2t$，

解得：$t=0$或3，

故“不动点”坐标为（0，0）或（3，3）；

②∵新抛物线顶点$B$为“不动点”，则设点$B$（$m$，$m$），

∴新抛物线的对称轴为：$x=m$，与$x$轴的交点$C$（$m$，0），

∵四边形$OABC$是梯形，

∴直线$x=m$在$y$轴左侧，

∵$BC$与$OA$不平行，

∴$OC\parallel AB$，

又∵点$A$（1，－1），点$B$（$m$，$m$），

∴$m=-1$，

故新抛物线是由抛物线$y=x^2-2x$向左平移2个单位得到的，

∴新抛物线的表达式为：$y=(x+1)^2-1$．

【点评】本题为二次函数综合运用题，涉及到二次函数基本知识、梯形基本性质，此类新定义题目，通常按照题设顺序，逐次求解即可．

25．（14 分）如图 1，$AD$、$BD$ 分别是△$ABC$ 的内角∠$BAC$、∠$ABC$ 的平分线，过点 $A$ 作 $AE\perp AD$，交 $BD$ 的延长线于点 $E$．

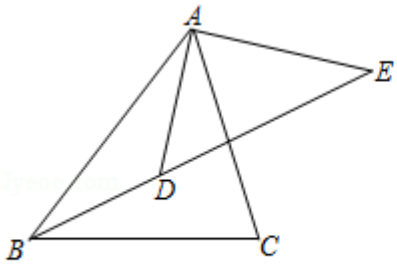



图 1

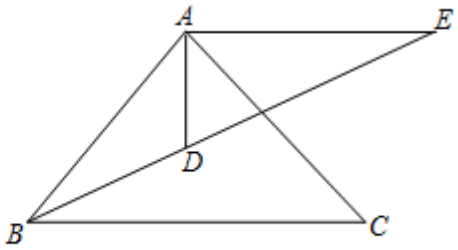



图 2

（1）求证：$\angle E=\frac{1}{2}\angle C$；

（2）如图 2，如果 $AE=AB$，且 $BD$：$DE=2$：3，求 $\cos\angle ABC$ 的值；

（3）如果∠$ABC$ 是锐角，且△$ABC$ 与△$ADE$ 相似，求∠$ABC$ 的度数，并直接写出 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值．

【考点】相似形综合题．

【分析】（1）由题意：$\angle E=90°-\angle ADE$，证明 $\angle ADE=90°-\frac{1}{2}\angle C$ 即可解决问题．

（2）延长 $AD$ 交 $BC$ 于点 $F$．证明 $AE\parallel BC$，可得 $\angle AFB=\angle EAD=90°$，$\frac{BF}{AF}=\frac{BD}{DE}$，由 $BD$：$DE=2$：3，可得 $\cos\angle ABC=\frac{BF}{AB}=\frac{BF}{AE}=\frac{2}{3}$．

（3）因为△$ABC$ 与△$ADE$ 相似，$\angle DAE=90°$，所以∠$ABC$ 中必有一个内角为 90°因为∠$ABC$ 是锐角，推出 $\angle ABC\neq 90°$．接下来分两种情形分别求解即可．

【解答】（1）证明：如图 1 中，

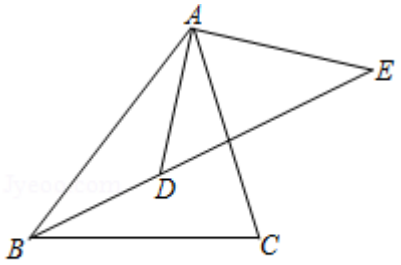



图 1

∵$AE \perp AD$，

∴$\angle DAE=90°$，$\angle E=90°-\angle ADE$，

∵$AD$ 平分$\angle BAC$，

∴$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，同理$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，

∵$\angle ADE=\angle BAD+\angle DBA$，$\angle BAC+\angle ABC=180°-\angle C$，

∴$\angle ADE=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)=90°-\frac{1}{2}\angle C$，

∴$\angle E=90°-(90°-\frac{1}{2}\angle C)=\frac{1}{2}\angle C$.

（2）解：延长 $AD$ 交 $BC$ 于点 $F$.

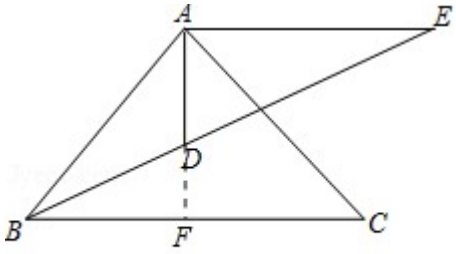



图 2

∵$AB=AE$，

∴$\angle ABE=\angle E$，

$BE$ 平分$\angle ABC$，

∴$\angle ABE=\angle EBC$，

∴$\angle E=\angle CBE$，

∴$AE \parallel BC$，

∴∠*AFB*＝∠*EAD*＝90°，$\frac{BF}{AF}=\frac{BD}{DE}$，

∵*BD*：*DE*＝2：3，

∴$\cos\angle ABC=\frac{BF}{AB}=\frac{BF}{AE}=\frac{2}{3}$.

（3）∵△*ABC* 与△*ADE* 相似，∠*DAE*＝90°，

∴∠*ABC* 中必有一个内角为 90°

∵∠*ABC* 是锐角，

∴∠*ABC*≠90°.

① 当∠*BAC*＝∠*DAE*＝90°时，

∵$\angle E=\frac{1}{2}\angle C$，

∴$\angle ABC=\angle E=\frac{1}{2}\angle C$，

∵∠*ABC*+∠*C*＝90°，

∴∠*ABC*＝30°，此时$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=2-\sqrt{3}$.

② 当∠*C*＝∠*DAE*＝90°时，$\angle E=\frac{1}{2}\angle C$＝45°，

∴∠*EDA*＝45°，

∵△*ABC* 与△*ADE* 相似，

∴∠*ABC*＝45°，此时$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=2-\sqrt{2}$.

综上所述，∠*ABC*＝30°或 45°，$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=2-\sqrt{3}$或 $2-\sqrt{2}$.

【点评】本题属于相似形综合题，考查了相似三角形的判定和性质，平行线的判定和性质，锐角三角函数等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.