上海市2021年中考数学试题

一、选择题

1. 下列实数中，有理数是（　）

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　C. $\sqrt{\frac{1}{4}}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{5}}$

【答案】C

【解析】

【分析】先化简二次根式，再根据有理数的定义选择即可

【详解】解：

A、$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∵ $\sqrt{2}$ 是无理数，故 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 是无理数

B、$\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ∵ $\sqrt{3}$ 是无理数，故 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 是无理数

C、$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ 为有理数

D、$\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ∵ $\sqrt{5}$ 是无理数，故 $\sqrt{\frac{1}{5}}$ 是无理数

故选：C

【点睛】本题考查二次根式的化简、无理数的定义、有理数的定义、熟练掌握有理数的定义是关键

2. 下列单项式中，a^2b^3 的同类项是（　）

A a^3b^2　　B. $2a^2b^3$　　C. a^2b　　D. ab^3

【答案】B

【解析】

【分析】比较对应字母的指数,分别相等就是同类项

【详解】∵a 的指数是3，b 的指数是2，与 a^2b^3 中 a 的指数是2，b 的指数是3不一致，

∴ a^3b^2 不是 a^2b^3 的同类项，不符合题意；

∵a 的指数是2，b 的指数是3，与 a^2b^3 中 a 的指数是2，b 的指数是3一致，

$\therefore 2a^2b^3$ 是 a^2b^3 的同类项，符合题意；

$\because a$ 的指数是 2，b 的指数是 1，与 a^2b^3 中 a 的指数是 2，b 的指数是 3 不一致，

$\therefore a^2b$ 不是 a^2b^3 的同类项，不符合题意；

$\because a$　指数是 1，b 的指数是 3，与 a^2b^3 中 a 的指数是 2，b 的指数是 3 不一致，

$\therefore ab^3$ 不是 a^2b^3 的同类项，不符合题意；

故选 B

【点睛】本题考查了同类项，正确理解同类项　定义是解题的关键.

3. 将抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 向下平移两个单位，以下说法错误的是（　）

A. 开口方向不变　　B. 对称轴不变　　C. y 随 x 的变化情况不变　D. 与 y 轴的交点不变

【答案】D

【解析】

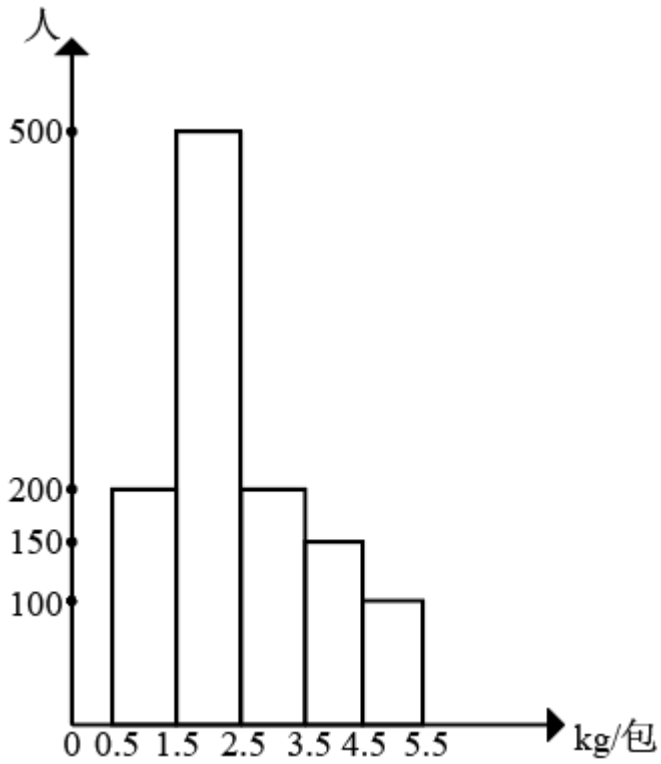
【分析】根据二次函数的平移特点即可求解.

【详解】将抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 向下平移两个单位，开口方向不变、对称轴不变、故 y 随 x 的变化情况不变；与 y 轴的交点改变

故选 D.

【点睛】此题主要考查二次函数的函数与图象，解题的关键是熟知二次函数图象平移的特点.

4. 商店准备一种包装袋来包装大米，经市场调查以后，做出如下统计图，请问选择什么样的包装最合适（　）



A. $^{2\text{kg}}$/包　　B. $^{3\text{kg}}$/包　　C. $^{4\text{kg}}$/包　　D. $^{5\text{kg}}$/包

【答案】A

【解析】

【分析】选择人数最多的包装是最合适的.

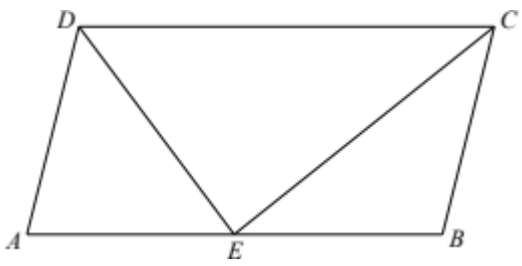
【详解】由图可知，选择 1.5kg/包-2.5kg/包的范围内的人数最多，

∴选择在 1.5kg/包-2.5kg/包的范围内的包装最合适.

故选：A.

【点睛】本题较简单，从图中找到选择人数最多的包装的范围，再逐项分析即可.

5. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=a, AD=b$，E 为 AB 中点，求 $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=$（　）



A. EC　　B. CE　　C. ED　　D. DE

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量的特点及加减法则即可求解.

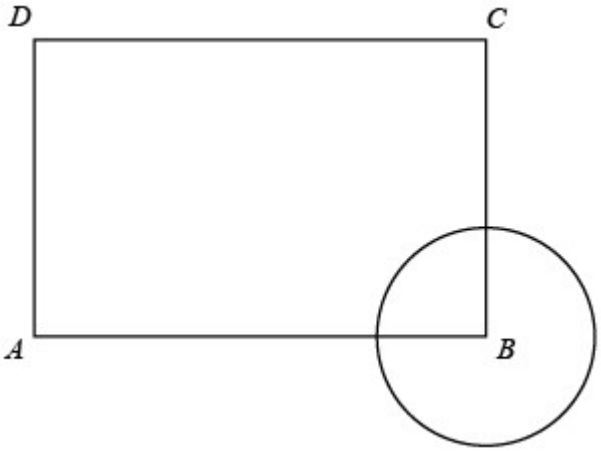
【详解】∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，E 为 AB 中点,

$\therefore \frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{2}AB+BC=EB+BC=EC$

故选 A.

【点睛】此题主要考查向量的表示，解题的关键是熟知平行四边形的特点及向量的加减法则.

6. 如图，已知长方形 $ABCD$ 中，$AB=4, AD=3$，圆 B 的半径为 1，圆 A 与圆 B 内切，则点 C, D 与圆 A 的位置关系是（　）



A. 点 C 在圆 A 外，点 D 在圆 A 内　　B. 点 C 在圆 A 外，点 D 在圆 A 外

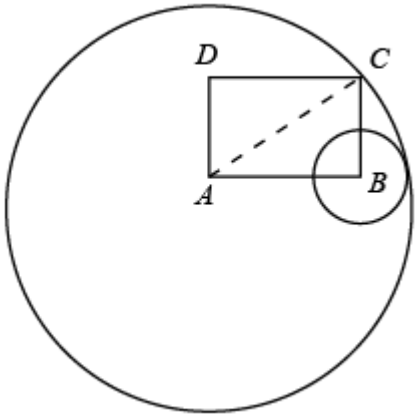
C. 点 C 在圆 A 上，点 D 在圆 A 内　　D. 点 C 在圆 A 内，点 D 在圆 A 外

【答案】C

【解析】

【分析】根据内切得出圆 A 的半径，再判断点 D、点 E 到圆心的距离即可

【详解】



∵圆 A 与圆 B 内切，$AB=4$，圆 B 的半径为 1

∴圆 A 的半径为 5

∵ $AD=3<5$

∴点 D 在圆 A 内

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

∴点 C 在圆 A 上

故选：C

【点睛】本题考查点与圆的位置关系、圆与圆的位置关系、勾股定理，熟练掌握点与圆的位置关系是关键

二、填空题

7. 计算：$x^7\div x^2=$_____.

【答案】x^5

【解析】

【分析】根据同底数幂的除法法则计算即可

【详解】∵ $x^7\div x^2=x^5$，

故答案为: x^5.

【点睛】本题考查了同底数幂的除法，熟练掌握运算的法则是解题的关键.

8. 已知 $f(x)=\frac{6}{x}$，那么 $f(\sqrt{3})=$_____.

【答案】$2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】直接利用已知的公式将 x 的值代入求出答案.

【详解】解：$\because f(x)=\frac{6}{x}$，

$\therefore f(\sqrt{3})=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$，

故答案为：$2\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了函数值，正确把已知代入是解题关键.

9. 已知 $\sqrt{x+4}=3$，则 $x=$_____.

【答案】5

【解析】

【分析】方程两边同平方，化为一元一次方程，进而即可求解.

【详解】解：$\sqrt{x+4}=3$，

两边同平方，得 $x+4=9$，

解得：x=5,

经检验，x=5 是方程的解,

∴x=5,

故答案是：5.

【点睛】本题主要考查解根式方程，把根式方程化为整式方程，是解题的关键.

10. 不等式 $2x-12<0$ 的解集是_____.

【答案】$x<6$

【解析】

【分析】根据不等式的性质即可求解.

【详解】$2x-12<0$

$2x<12$

$x<6$

故答案为：$x<6$.

【点睛】此题主要考查不等式的求解，解题的关键是熟知不等式的性质.

11. 70°的余角是_____.

【答案】20°

【解析】

【分析】根据余角的定义即可求解.

【详解】70°的余角是$90°-70^\circ=20^\circ$

故答案为：20°.

【点睛】此题主要考查余角的求解，解题的关键是熟知余角的定义与性质.

12. 若一元二次方程$2x^2-3x+c=0$无解，则c的取值范围为_____.

【答案】$c>\frac{9}{8}$

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式的意义得到$\triangle=(-3)^2-4\times2c<0$，然后求出$c$的取值范围.

【详解】解：关于x的一元二次方程$2x^2-3x+c=0$无解，

$\because a=2$，$b=-3$，$c=c$，

$\therefore \triangle=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2c<0$，

解得$c>\frac{9}{8}$，

$\therefore c$的取值范围是$c>\frac{9}{8}$.

故答案为：$c>\frac{9}{8}$.

【点睛】本题考查了一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的判别式$\triangle=b^2-4ac$：当$\triangle>0$，方程有两个不相等的实数根；当$\triangle=0$，方程有两个相等的实数根；当$\triangle<0$，方程没有实数根.

13. 有数据$1,2,3,5,8,13,21,34$，从这些数据中取一个数据，得到偶数的概率为_____.

【答案】$\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】根据概率公式计算即可

【详解】根据概率公式，得偶数的概率为$\frac{3}{8}$，

故答案为：$\frac{3}{8}$.

【点睛】本题考查了概率计算，熟练掌握概率计算公式是解题的关键.

14. 已知函数$y=kx$经过二、四象限，且函数不经过$(-1,1)$，请写出一个符合条件的函数解析式_____.

【答案】$y=-2x$（$k<0$且$k\neq-1$即可）

【解析】

【分析】正比例函数经过二、四象限，得到k<0，又不经过(-1,1)，得到k≠-1，由此即可求解.

【详解】解：∵正比例函数$y=kx$经过二、四象限，

∴k<0,

当$y=kx$经过$(-1,1)$时，k=-1,

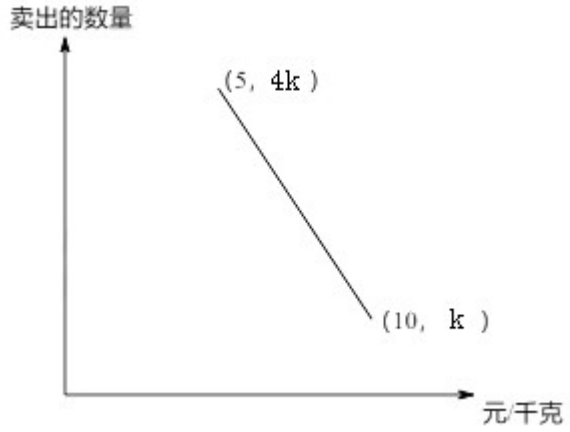
由题意函数不经过$(-1,1)$，说明k≠-1,

故可以写的函数解析式为：$y=-2x$(本题答案不唯一，只要$k<0$且$k\neq-1$即可).

【点睛】本题考查了正比例函数的图像和性质，属于基础题，$y=kx$(k≠0)当$k<0$时经过第二、四象限；

当$k>0$时经过第一、三象限.

15. 某人购进一批苹果到集贸市场零售，已知卖出的苹果数量与售价之间的关系如图所示，成本为5元/千克，现以8元/千克卖出，赚_____元.



【答案】$\frac{33k}{5}$

【解析】

【分析】利用待定系数法求出函数关系式，求出当售价为8元/千克时的卖出的苹果数量．再利用利润=（售价-进价）×销售量，求出利润.

【详解】设卖出的苹果数量与售价之间的关系式为$y=mx+n(5\le x\le 10)$，将（5，4k），（10，k）代入关系式:

$\begin{cases}5m+n=4k\\10m+n=k\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=-\frac{3}{5}k\\n=7k\end{cases}$

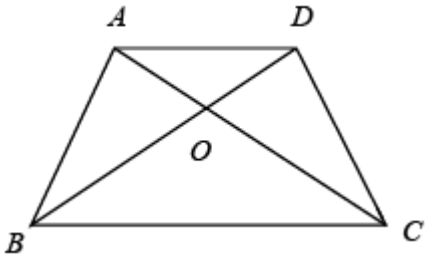
$\therefore y=-\frac{3}{5}kx+7k(5\le x\le 10)$

令$x=8$，则$y=\frac{11}{5}k$

$\therefore$利润=$(8-5)\times\frac{11}{5}k=\frac{33}{5}k$

【点睛】本题考查待定系数法求函数解析式和利润求解问题．利润=（售价-进价）×销售量.

16. 如图，已知在梯形ABCD中，AD//BC，$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{1}{2}$，则$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BCD}}=$_____.



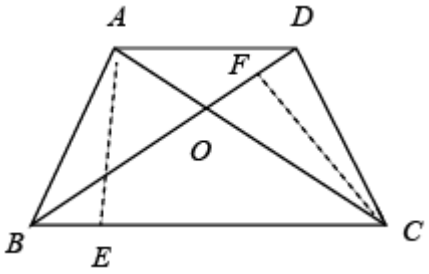
【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】先根据等高的两个三角形的面积比等于边长比，得出$\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$，再根据$\triangle AOD\backsim\triangle COB$得出

$\frac{OD}{OB}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$，再根据等高的两个三角形的面积比等于边长比计算即可

【详解】解：作$AE\perp BC$，$CF\perp BD$



$\because\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\triangle ABD$和$\triangle BCD$等高，高均为AE

$\therefore\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AE}{\frac{1}{2}BC\cdot AE}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$

$\because AD\parallel BC$

$\therefore\triangle AOD\backsim\triangle COB$

$\therefore \frac{OD}{OB}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$

$\because$△BOC和△DOC等高，高均为CF

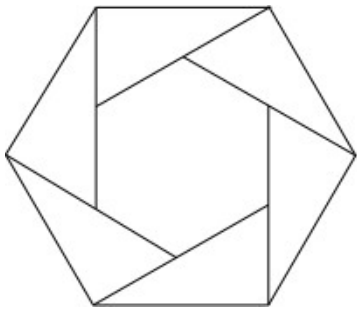
$\therefore \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle DOC}}=\frac{\frac{1}{2}OB\cdot CF}{\frac{1}{2}OD\cdot CF}=\frac{OB}{OD}=\frac{2}{1}$

$\therefore \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{2}{3}$

故答案为：$\frac{2}{3}$

【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质、等高的两个三角形的面积比等于边长比，熟练掌握三角形的面积的特点是解题的关键

17. 六个带$30°$角的直角三角板拼成一个正六边形，直角三角板的最短边为1，求中间正六边形的面积_____.

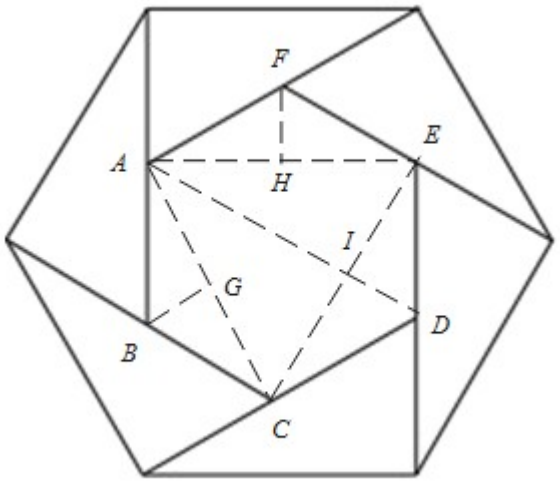


【答案】$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【解析】

【分析】由六个带$30°$角的直角三角板拼成一个正六边形，直角三角板的最短边为1，可以得到中间正六边形的边长为1，做辅助线以后，得到△ABC、△CDE、△AEF为以1为边长的等腰三角形，△ACE为等边三角形，再根据等腰三角形与等边三角形的性质求出边长，求出面积之和即可.

【详解】解：如图所示，连接AC、AE、CE，作$BG\perp AC$、$DI\perp CE$、$FH\perp AE$，$AI\perp CE$，



在正六边形*ABCDEF*中,

∵直角三角板的最短边为1,

∴正六边形*ABCDEF*为1,

∴△*ABC*、△*CDE*、△*AEF*为以1为边长的等腰三角形，△*ACE*为等边三角形,

∵∠*ABC*=∠*CDE*=∠*EFA*=120°，*AB*=*BC*=*CD*=*DE*=*EF*=*FA*=1,

∴∠*BAG*=∠*BCG*=∠*DCE*=∠*DEC*=∠*FAE*=∠*FEA*=30°,

∴$BG=DI=FH=\frac{1}{2}$,

∴由勾股定理得：$AG=CG=CI=EI=EH=AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴$AC=AE=CE=\sqrt{3}$,

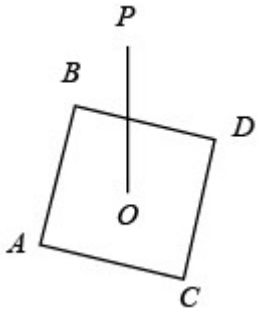
∴由勾股定理得：$AI=\frac{3}{2}$,

∴$S=3\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

故答案为：$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了含30度角的直角三角形的性质、正多边形形与圆以及等边三角形的性质，关键在于知识点：在直角三角形中，30度角所对的直角边等于斜边的一半的应用.

18. 定义：在平面内，一个点到图形的距离是这个点到这个图上所有点的最短距离，在平面内有一个正方形，边长为2，中心为O，在正方形外有一点$P,OP=2$，当正方形绕着点O旋转时，则点P到正方形的最短距离d的取值范围为_____.



【答案】$2-\sqrt{2}\le d\le 1$

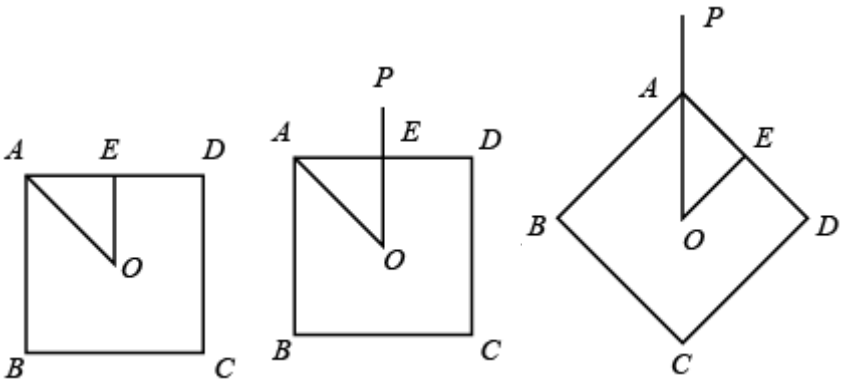
【解析】

【分析】先确定正方形的中心O与各边的所有点的连线中的最大值与最小值，然后结合旋转的条件即可求解.

【详解】解：如图1，设AD的中点为E，连接OA，OE，则$AE=OE=1$，$\angle AEO=90°$，$OA=\sqrt{2}$.

∴点O与正方形$ABCD$边上的所有点的连线中，

OE最小，等于1，OA最大，等于$\sqrt{2}$.



$\because OP=2$,

∴点P与正方形$ABCD$边上的所有点的连线中，

如图 2 所示，当点 E 落在 OP 上时，最大值 $PE=PO-EO=2-1=1$；

如图 3 所示，当点 A 落在 OP 上时，最小值 $PA=PO-AO=2-\sqrt{2}$.

∴当正方形 $ABCD$ 绕中心 O 旋转时，点 P 到正方形的距离 d 的取值范围是 $2-\sqrt{2}\le d\le 1$.

故答案为：$2-\sqrt{2}\le d\le 1$

【点睛】本题考查了新定义、正方形的性质、勾股定理等知识点，准确理解新定义的含义和熟知正方形的性质是解题的关键.

三、解答题

19. 计算：$9^{\frac{1}{2}}+|1-\sqrt{2}|-2^{-1}\times\sqrt{8}$

【答案】2

【解析】

【分析】根据分指数运算法则，绝对值化简，负整指数运算法则，化最简二次根式，合并同类二次根式以及同类项即可.

【详解】解：$9^{\frac{1}{2}}+|1-\sqrt{2}|-2^{-1}\times\sqrt{8}$，

$=\sqrt{9}-(1-\sqrt{2})-\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}$，

$=3+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}$，

=2.

【点睛】本题考查实数混合运算，分指数运算法则，绝对值符号化简，负整指数运算法则，化最简二次根式，合并同类二次根式与同类项，掌握实数混合运算法则与运算顺序，分指数运算法则，绝对值符号化简，负整指数运算法则，化最简二次根式，合并同类二次根式与同类项是解题关键.

20. 解方程组：$\begin{cases}x+y=3\\x^2-4y^2=0\end{cases}$

【答案】$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=6\\y=-3\end{cases}$

【解析】

【分析】由第一个方程得到 $x=3-y$，再代入第二个方程中，解一元二次方程方程即可求出 y，再回代第

一个方程中即可求出x.

【详解】解：由题意：$\begin{cases}x+y=3\cdots(1)\\x^2-4y^2=0\cdots(2)\end{cases}$，

由方程(1)得到：$x=3-y$，再代入方程(2)中：

得到：$(3-y)^2-4y^2=0$，

进一步整理为：$3-y=2y$或$3-y=-2y$，

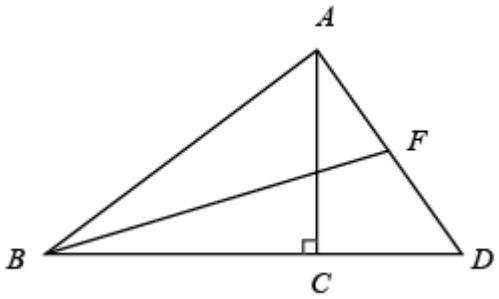
解得$y_1=1$，$y_2=-3$，

再回代方程(1)中，解得对应的$x_1=2$，$x_2=6$，

故方程组的解为：$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$和$\begin{cases}x=6\\y=-3\end{cases}$.

【点睛】本题考查了代入消元法解方程及一元二次方程的解法，熟练掌握代入消元法，运算过程中细心即可.

21. 已知在$\triangle ABD$中，$AC\perp BD, BC=8, CD=4$，$\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$，$BF$为$AD$边上的中线.



（1）求AC长；

（2）求$\tan\angle FBD$的值.

【答案】（1）$AC=6$；（2）$\frac{3}{10}$

【解析】

【分析】（1）在 $Rt\triangle ABC$ 中，利用三角函数即可求出 AB，故可得到 AC 长；

（2）过点 F 作 $FG\perp BD$，利用中位线的性质得到 FG，CG，再根据正切的定义即可求解.

【详解】（1）$\because AC\perp BD$，$\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$

$\therefore \cos\angle ABC=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$

$\therefore AB=10$

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$；

（2）过点 F 作 $FG\perp BD$，

$\because BF$ 为 AD 边上的中线.

$\therefore F$ 是 AD 中点

$\because FG\perp BD$，$AC\perp BD$

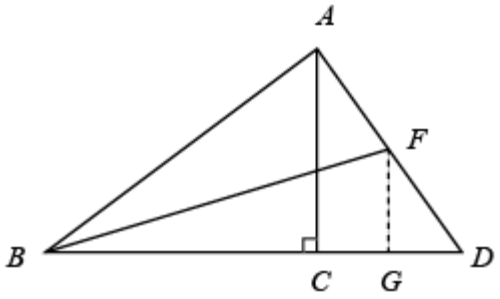
$\therefore FG//AC$

$\therefore FG$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线

$\therefore FG=\frac{1}{2}AC=3$

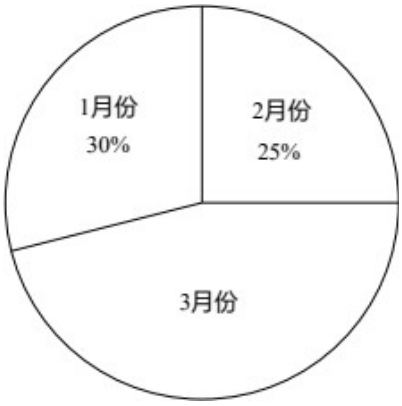
$CG=\frac{1}{2}CD=2$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle BFG$ 中，$\tan\angle FBD=\frac{FG}{BG}=\frac{3}{8+2}=\frac{3}{10}$.



【点睛】此题主要考查解直角三角形，解题的关键是熟知三角函数的定义.

22. 现在$5G$手机非常流行，某公司第一季度总共生产80万部$5G$手机，三个月生产情况如下图.



（1）求三月份共生产了多少部手机?

（2）$5G$手机速度很快，比$4G$下载速度每秒多95MB，下载一部1000MB的电影，$5G$比$4G$要快190秒，求$5G$手机的下载速度.

【答案】（1）36万部；（2）$100\,\text{MB}/\text{秒}$

【解析】

【分析】（1）根据扇形统计图求出3月份的百分比，再利用80万$\times$3月份的百分比求出三月份共生产的手机数；

（2）设$5G$手机的下载速度为$x\,\text{MB}/\text{秒}$，则$4G$下载速度为$(x-95)\,\text{MB}/\text{秒}$，根据下载一部$1000\text{MB}$的电影，$5G$比$4G$要快190秒列方程求解.

【详解】（1）3月份的百分比=$1-30\%-25\%=45\%$

三月份共生产的手机数=$80\times45\%=36$（万部）

答：三月份共生产了36万部手机.

（2）设$5G$手机的下载速度为$x\,\text{MB}/\text{秒}$，则$4G$下载速度为$(x-95)\,\text{MB}/\text{秒}$，

由题意可知：$\dfrac{1000}{x-95}-\dfrac{1000}{x}=190$

解得：$x=100$

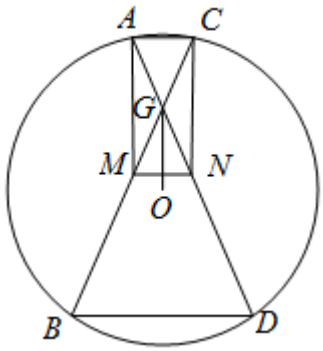
检验：当$x=100$时，$x\cdot(x-95)\neq0$

$\therefore x=100$是原分式方程的解.

答：$5G$手机的下载速度为100MB/秒.

【点睛】本题考查实际问题与分式方程．求解分式方程时，需要检验最简公分母是否为0.

23. 已知：在圆O内，弦AD与弦BC交于点$G,AD=CB,M,N$分别是CB和AD的中点，联结MN,OG.



（1）求证：$OG\perp MN$；

（2）联结AC,AM,CN，当$CN//OG$时，求证：四边形$ACNM$为矩形.

【答案】（1）见解析；（2）见解析

【解析】

【分析】（1）连结OM,ON，由M、N分别是CB和AD的中点，可得$OM\perp BC$，$ON\perp AD$，由$AB=CD$，可得$OM=ON$，可证$Rt\Delta EOP\cong Rt\Delta FOP(HL)$，$MG=NG$，$\angle MGO=\angle NGO$，根据等腰三角形三线合一性质$OG\perp MN$；

（2）设OG交MN于E，由$Rt\Delta EOP\cong Rt\Delta FOP$，可得$MG=NG$，可得$\angle CMN=\angle ANM$，

$CM=\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}AD=AN$，可证$\triangle CMN\cong\triangle ANM$可得$AM=CN$，由$CN/\!/OG$，可得

$\angle AMN=\angle CNM=90^\circ$，由$\angle AMN+\angle CNM=180^\circ$可得$AM/\!/CN$，可证$ACNM$是平行四边形，再由

$\angle AMN=90^\circ$可证四边形$ACNM$是矩形.

【详解】证明：（1）连结OM,ON，

$\because M$、N分别是CB和AD的中点，

$\therefore OM$，ON为弦心距，

$\therefore OM\perp BC$，$ON\perp AD$，

$\therefore\angle GMO=\angle GNO=90^\circ$，

在$\odot O$中，$AB=CD$，

$\therefore OM=ON$，

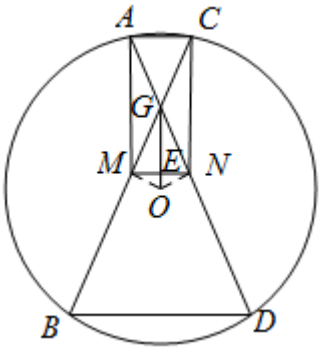
在$Rt\triangle OMG$和$Rt\triangle ONG$中，

$\begin{cases}OM=ON\\OG=OG\end{cases}$，

$\therefore Rt\Delta GOM\cong Rt\Delta GON(HL)$，

$\therefore MG=NG$，$\angle MGO=\angle NGO$，

$\therefore OG\perp MN$；



（2）设OG交MN于E,

$\because Rt\Delta GOM\cong Rt\Delta GON(HL)$,

$\therefore MG=NG$,

$\therefore \angle GMN=\angle GNM$，即$\angle CMN=\angle ANM$,

$\because CM=\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}AD=AN$,

在$\triangle CMN$和$\triangle ANM$中

$$\begin{cases} CM=AN \\ \angle CMN=\angle ANM \\ MN=NM \end{cases},$$

$\therefore \triangle CMN\cong\triangle ANM$,

$\therefore AM=CN,\angle AMN=\angle CNM$,

$\because CN\parallel OG$,

$\therefore \angle CNM=\angle GEM=90^{\circ}$,

$\therefore \angle AMN=\angle CNM=90^{\circ}$,

$\therefore \angle AMN+\angle CNM=90^{\circ}+90^{\circ}=180^{\circ}$,

$\therefore AM\parallel CN$,

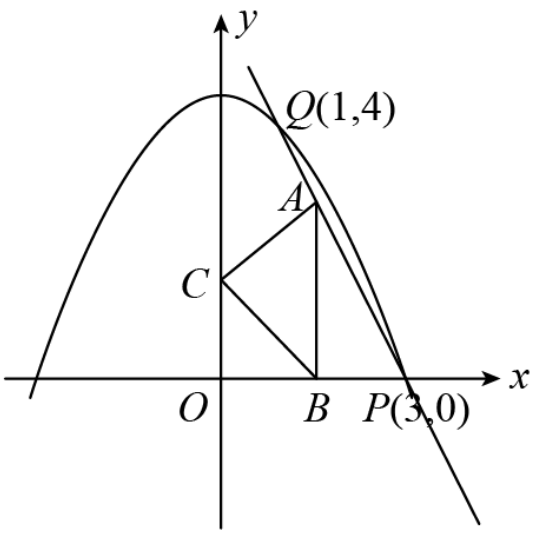
$\therefore ACNM$是平行四边形,

$\because \angle AMN=90^{\circ}$,

$\therefore$四边形$ACNM$是矩形.

【点睛】本题考查垂径定理，三角形全等判定与性质，等腰三角形判定与性质，平行线判定与性质，矩形的判定，掌握垂径定理，三角形全等判定与性质，等腰三角形判定与性质，平行线判定与性质，矩形的判定是解题关键.

24. 已知抛物线$y=ax^2+c(a\neq 0)$过点$P(3,0),Q(1,4)$.



（1）求抛物线的解析式；

（2）点A在直线PQ上且在第一象限内，过A作$AB\perp x$轴于B，以AB为斜边在其左侧作等腰直角ABC.

①若A与Q重合，求C到抛物线对称轴的距离；

②若C落在抛物线上，求C的坐标.

【答案】（1）$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$；（2）①1；②点$C$的坐标是$\left(-2,\frac{5}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1)将$P(3,0)$、$Q(1,4)$两点分别代入$y=ax^2+c$，得$\begin{cases}9a+c=0,\\a+c=4,\end{cases}$，解方程组即可；

（2）①根据AB=4,斜边上的高为2,Q的横坐标为1,计算点C的横坐标为-1,即到y轴的距离为1；②根据直线PQ的解析式，设点A（m，-2m+6）,三角形ABC是等腰直角三角形，用含有m的代数式表示点C的坐标，代入抛物线解析式求解即可.

【详解】（1）将 $P(3,0)$、$Q(1,4)$ 两点分别代入 $y=ax^2+c$，得 $\begin{cases}9a+c=0,\\ a+c=4,\end{cases}$

解得 $a=-\frac{1}{2},c=\frac{9}{2}$.

所以抛物线的解析式是 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$.

（2）①如图 2，抛物线的对称轴是 y 轴，当点 A 与点 $Q(1,4)$ 重合时，$AB=4$，

作 $CH\perp AB$ 于 H.

∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

∴ $\triangle CBH$ 和 $\triangle CAH$ 也是等腰直角三角形，

∴ $CH=AH=BH=2$，

∴点 C 到抛物线的对称轴的距离等于 1.

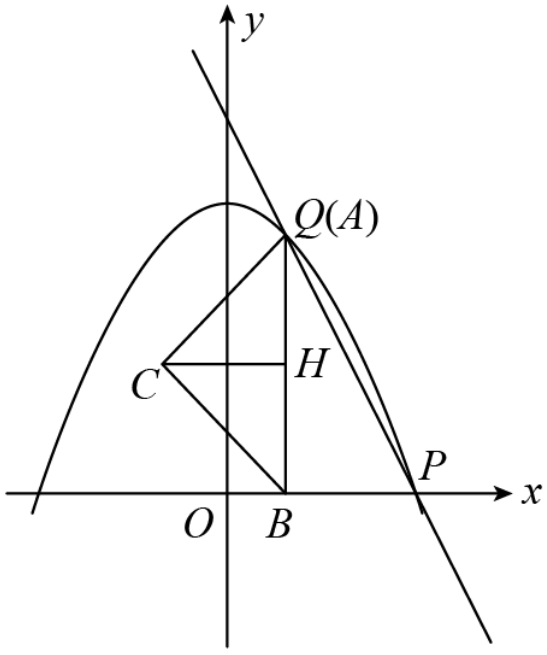


图2

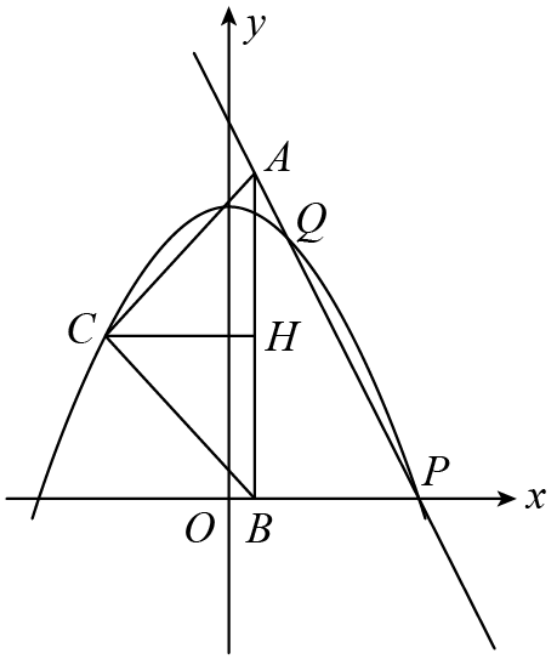


图3

② 如图 3，设直线 PQ 的解析式为 $y=kx+b$，由 $P(3,0)$、$Q(1,4)$，得 $\begin{cases}3k+b=0,\\ k+b=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=-2, \\ b=6, \end{cases}$

$\therefore$直线 PQ 的解析式为 $y=-2x+6$，

设 $A(m,-2m+6)$，

$\therefore AB=-2m+6$，

所以 $CH=BH=AH=-m+3$.

所以 $y_C=-m+3, x_C=-(-m+3-m)=2m-3$.

将点 $C(2m-3,-m+3)$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$，

得 $-m+3=-\frac{1}{2}(2m-3)^2+\frac{9}{2}$.

整理，得 $2m^2-7m+3=0$.

因式分解，得 $(2m-1)(m-3)=0$.

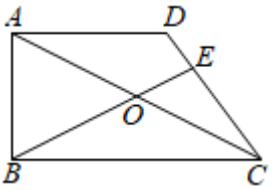
解得 $m=\frac{1}{2}$，或 $m=3$（与点 B 重合，舍去）.

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$2m-3=1-3=-2, -m+3=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$.

所以点 C 的坐标是 $\left(-2,\frac{5}{2}\right)$.

【点评】本题考查了抛物线解析式的确定，一次函数解析式的确定，等腰直角三角形的性质，一元二次方程的解法，熟练掌握待定系数法，灵活用解析式表示点的坐标，熟练解一元二次方程是解题的关键.

25. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC, \angle ABC=90^\circ, AD=CD, O$ 是对角线 AC 的中点，联结 BO 并延长交边 CD 或边 AD 于 E.



（1）当点E在边CD上时，

①求证：$\triangle DAC\backsim\triangle OBC$；

②若$BE\perp CD$，求$\dfrac{AD}{BC}$的值；

（2）若$DE=2,OE=3$，求CD的长.

【答案】（1）①见解析；②$\dfrac{2}{3}$；（2）$1+\sqrt{19}$或$3+\sqrt{19}$

【解析】

【分析】（1）①根据已知条件、平行线性质以及直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可推导，$\angle DAC=\angle DCA=\angle OBC=\angle OCB$，由此可得$\triangle DAC\backsim\triangle OBC$；

②若$BE\perp CD$，那么在$\mathrm{Rt}\triangle BCE$中，由$\angle 2=\angle 3=\angle 4$．可得$\angle 2=\angle 3=\angle 4=30^{\circ}$，作$DH\perp BC$于$H$．设$AD=CD=2m$，那么$BH=AD=2m$．根据$30^{\circ}$所对直角边是斜边的一半可知$CH=m$，由此可得$\dfrac{AD}{BC}$的值.

（2）①当点E在AD上时，可得四边形$ABCE$是矩形，设$AD=CD=x$，在$\mathrm{Rt}\triangle ACE$和$\mathrm{Rt}\triangle DCE$中，根据$CE^2=CE^2$，列方程$6^2-(x-2)^2=x^2-2^2$求解即可.

②当点E在CD上时，设$AD=CD=x$，由$\triangle DAC\backsim\triangle OBC$，得$\dfrac{DC}{OC}=\dfrac{AC}{BC}$，所以$\dfrac{x}{m}=\dfrac{2OC}{BC}$，所以

$\frac{OC}{BC}=\frac{x}{2m}$；由$\triangle EOC\backsim\triangle ECB$得$\frac{EO}{EC}=\frac{EC}{EB}=\frac{OC}{CB}$，所以$\frac{3}{x-2}=\frac{x-2}{m+3}=\frac{OC}{CB}$，解出$x$的值即可.

【详解】（1）①由$AD=CD$，得$\angle 1=\angle 2$.

由$AD//BC$，得$\angle 1=\angle 3$.

因为BO是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$斜边上的中线，所以$OB=OC$．所以$\angle 3=\angle 4$.

所以$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$.

所以$\triangle DAC\backsim\triangle OBC$.

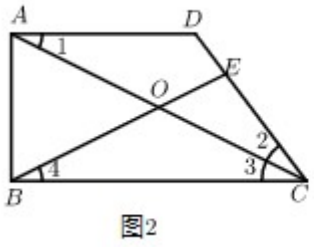


图2

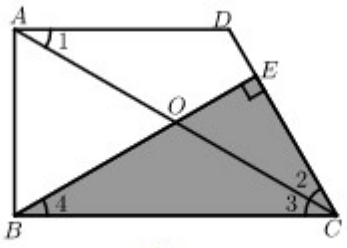


图3

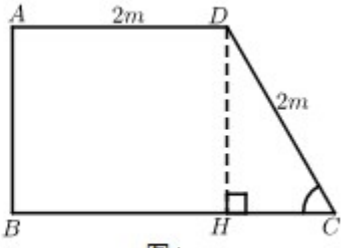


图4

②若$BE\perp CD$，那么在$\mathrm{Rt}\triangle BCE$中，由$\angle 2=\angle 3=\angle 4$．可得$\angle 2=\angle 3=\angle 4=30^{\circ}$.

作$DH\perp BC$于H．设$AD=CD=2m$，那么$BH=AD=2m$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DCH$中，$\angle DCH=60^{\circ},DC=2m$，所以$CH=m$.

所以$BC=BH+CH=3m$.

所以$\frac{AD}{BC}=\frac{2m}{3m}=\frac{2}{3}$.

（2）①如图5，当点E在AD上时，由$AD//BC,O$是AC的中点，可得$OB=OE$，

所以四边形$ABCE$是平行四边形.

又因为$\angle ABC=90^{\circ}$，所以四边形$ABCE$是矩形，

设$AD=CD=x$，已知$DE=2$，所以$AE=x-2$.

已知$OE=3$，所以$AC=6$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ACE$和$\mathrm{Rt}\triangle DCE$中，根据$CE^2=CE^2$，列方程$6^2-(x-2)^2=x^2-2^2$.

解得$x=1+\sqrt{19}$，或$x=1-\sqrt{19}$（舍去负值）.

②如图6，当点E在CD上时，设$AD=CD=x$，已知$DE=2$，所以$CE=x-2$.

设$OB=OC=m$，已知$OE=3$，那么$EB=m+3$.

一方面，由$\triangle DAC\backsim\triangle OBC$，得$\dfrac{DC}{OC}=\dfrac{AC}{BC}$，所以$\dfrac{x}{m}=\dfrac{2OC}{BC}$，所以$\dfrac{OC}{BC}=\dfrac{x}{2m}$，

另一方面，由$\angle 2=\angle 4$，$\angle BEC$是公共角，得$\triangle EOC\backsim\triangle ECB$.

所以$\dfrac{EO}{EC}=\dfrac{EC}{EB}=\dfrac{OC}{CB}$，所以$\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{x-2}{m+3}=\dfrac{OC}{CB}$.

等量代换，得$\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{x-2}{m+3}=\dfrac{x}{2m}$. 由$\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{x}{2m}$，得$m=\dfrac{x^2-2x}{6}$.

将$m=\dfrac{x^2-2x}{6}$代入$\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{x-2}{m+3}$，整理，得$x^2-6x-10=0$.

解得$x=3+\sqrt{19}$，或$x=3-\sqrt{19}$（舍去负值）.

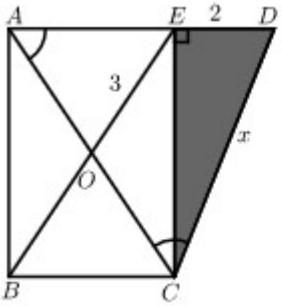


图5

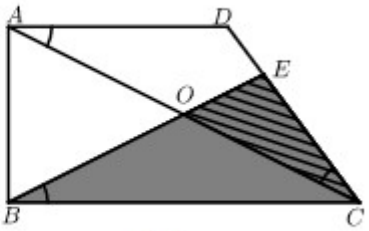


图6

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定与性质，斜边上的中线，勾股定理等，能够运用相似三角形边的关系列方程是解题的关键.