2026年上海市初中学业水平考试

数学试卷

（考试时间100分钟，满分150分）

（试卷共5页，答题纸共2页）

一、选择题（本大题共6小题，每小题4分，满分24分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列选项中，是无理数的是(　)

A. $\frac{5}{7}$　　B. 4　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{9}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查无理数的概念，根据无理数和有理数的定义逐一判断选项即可，用到的知识点为：无理数是无限不循环小数，有理数是整数和分数的统称．

【详解】解：选项A，$\frac{5}{7}$是分数，属于有理数，

选项B，4是整数，属于有理数，

选项C，$\sqrt{2}$是无限不循环小数，是无理数，

选项D，$\sqrt{9}=3$，3是整数，属于有理数．

2. 下列选项中，与$2a^2bc$是同类项的是（　）

A. ab^2c　　B. a^2bc　　C. $2abc$　　D. $2ab^2c$

【答案】B

【解析】

【分析】根据同类项定义：所含字母相同，且相同字母的指数分别相同的单项式为同类项，逐一判断选项即可．

【详解】解：A、$2a^2bc$ 与 ab^2c 中字母 a,b 的指数对应不相同，不是同类项，故选项不符合题意；

B、符合同类项的定义，故选项符合题意；

C、$2a^2bc$ 与 $2abc$ 中字母 a 的指数不相同，不是同类项，故选项不符合题意；

D、$2a^2bc$ 与 $2ab^2c$ 中字母 a,b 的指数对应不相同，不是同类项，故选项不符合题意．

3. 下列方程中，没有实数根的是（　）

A. $x^2-2x=0$　　B. $x^2-2=0$　　C. $x^2+2x=0$　　D. $x^2+2=0$

【答案】D

【解析】

【分析】对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，当判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根，计算各选项的判别式即可判断．

【详解】解：对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，判别式为 $\Delta=b^2-4ac$．

选项 A：方程为 $x^2-2x=0$，$a=1,b=-2,c=0$，

$\therefore\Delta=(-2)^2-4\times1\times0=4>0$，方程有两个不相等的实数根．

选项 B：方程为 $x^2-2=0$，$a=1,b=0,c=-2$，

$\therefore\Delta=0^2-4\times1\times(-2)=8>0$，方程有两个不相等的实数根．

选项 C：方程为 $x^2+2x=0$，$a=1,b=2,c=0$，

$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4 > 0$，方程有两个不相等的实数根．

选项 D：方程为 $x^2 + 2 = 0$，$a = 1, b = 0, c = 2$，

$\therefore \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 2 = -8 < 0$，方程没有实数根．

4. 已知一周的周一至周五，某同学的运动时间为 34、28、40、36、32 分钟，为了让一周 7 天内的平均活动时间恰好达到 40 分钟，该同学周六、周日应分别运动（　）分钟．

A. 50，50　　B. 45，60　　C. 50，60　　D. 55，60

【答案】C

【解析】

【分析】根据平均数的定义，先求出 7 天需要的总运动时间，再减去前 5 天的总运动时间，得到周六周日的总运动时间，对比选项得到结果．

【详解】解：∵7 天平均运动时间为 40 分钟，

∴7 天总运动时间为 $40 \times 7 = 280$ 分钟，

∵周一到周五的总运动时间为 $34 + 28 + 40 + 36 + 32 = 170$ 分钟，

∴周六和周日的总运动时间为 $280 - 170 = 110$ 分钟，

对比各选项，只有 C 选项中 $50 + 60 = 110$，符合题意．

5. 已知 $\odot A$ 的半径为 3，$\odot B$ 的半径为 7，且 $AB = 2$，则 $\odot A$ 与 $\odot B$ 位置关系是（　）

A. 内含　　B. 相交　　C. 相切　　D. 相离

【答案】A

【解析】

【分析】本题根据两圆位置关系的判定方法，比较圆心距与两圆半径差的大小，即可得出结论，若两圆半径分别为 R，r（$R > r$），圆心距为 d，当 $d < R - r$ 时，两圆内含．

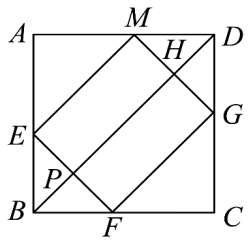
【详解】解：设 $\odot A$ 的半径 $r = 3$，$\odot B$ 的半径 $R = 7$，两圆圆心距 $d = AB = 2$，

$\therefore R - r = 7 - 3 = 4$，

$\because d = 2 < 4 = R - r$，

$\therefore \odot A$ 与 $\odot B$ 的位置关系是内含．

6. 如图，已知边长为1的正方形 $ABCD$，点 E 是边 AB 上的一点(不与点 A、B 重合)，过点 E 作 $EM \parallel BD$，交边 AD 与点 M，作点 E、M 关于 BD 的对称点 F、G，联结 EF、MG 交 BD 于点 P、H，现有以下两个命题：①四边形 $EFGM$ 的周长是一个定值；②四边形 $EPHM$ 的周长是一个定值；下列说法中，正确的是(　)



A. ①、②均正确　　B. ① 正确，②错误

C. ① 错误，②正确　　D. ①、②均错误

【答案】B

【解析】

【分析】设 $AM = a$，则 $MD = 1 - a$，根据题意以及正方形的性质分别求得 $EF = MG = \sqrt{2}(1 - a)$，$FG = EM = \sqrt{2}a$，进而求得四边形 $EFGM$、$EPHM$ 的周长，即可求解．

【详解】解：依题意，$AM = AE, MD = DG, BF = BE, CF = CG$，设 $AM = a$，则 $MD = 1 - a$，$\triangle AME$ 是等腰直角三角形，则 $EM = \sqrt{2}a$，$\triangle MDG$ 是等腰直角三角形，$MG = \sqrt{2}(1 - a)$，$\triangle MHD$ 是

等腰直角三角形，则 $MH=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)$

同理可得 $EF=MG=\sqrt{2}(1-a)$，$FG=EM=\sqrt{2}a$，

∴四边形 $EFGM$ 的周长 $=2(EM+EF)=2\sqrt{2}a+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}a=2\sqrt{2}$

四边形 $EPHM$ 的周长 $=2(EM+MH)=2\sqrt{2}a+\sqrt{2}-\sqrt{2}a=\sqrt{2}a+\sqrt{2}$

故①正确，②错误

二、填空题（本大题共 11 小题，每小题 4 分，满分 44 分）

【请将结果直接填入答题纸相应的空格内】

7. 计算 $(m^2)^4$ 的结果为_____.

【答案】 m^8

【解析】

【分析】根据幂的乘方运算法则计算即可.

【详解】解：$(m^2)^4=m^{2\times4}=m^8$.

8. 在 1，-2，-3，4，5 这 5 个数中选一个数，选出的数是正数的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】先确定所有等可能的结果总数，再找出选出的数为正数的结果数，再根据概率公式计算即可.

【详解】解：根据题意，总共有 5 个数，所有等可能的结果总数 $n=5$，其中正数为 1，4，5，满足条件的结果数 $m=3$.

根据概率公式$P=\frac{m}{n}$，可得选出的数是正数的概率为$P=\frac{3}{5}$．

9. 方程$\sqrt{13x-1}=5$的解为_____．

【答案】$x=2$

【解析】

【详解】解：$\sqrt{13x-1}=5$

$\therefore 13x-1=25$

解得：$x=2$，经检验$x=2$是原方程的解．

10. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，$AB=10$，$AC=6$，则$\tan B$的值为_____．

【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】先利用勾股定理求出直角边BC的长度，再根据锐角三角函数中正切的定义计算即可．

【详解】解：在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，$AB=10$，$AC=6$，

由勾股定理得$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

根据正切的定义，$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$．

11. 在等腰三角形ABC（$\angle A\neq\angle B$）中，$\angle A=80^{\circ}$，则$\angle B$的度数为_____．

【答案】20°或50°

【解析】

【分析】本题分$\angle A$是顶角，$\angle A$是底角两种情况，结合等腰三角形性质，三角形内角和定理和已知条件$\angle A \neq \angle B$，排除不符合条件的情况后求解．

【详解】已知等腰$\triangle ABC$中，$\angle A = 80^\circ$，且$\angle A \neq \angle B$．

若$\angle A$是顶角，则$\angle B = \angle C$，所以$\angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$，符合$\angle A \neq \angle B$；

若$\angle A$是底角，当$\angle B$是顶角时，$\angle C = \angle A = 80^\circ$，所以$\angle B = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$，符合$\angle A \neq \angle B$；

当$\angle C$是顶角时，$\angle B = \angle A = 80^\circ$，与$\angle A \neq \angle B$矛盾，故舍去．

综上，$\angle B$的度数为20°或50°．

12. 已知点$A(m,n)$与点$B(3,4)$在同一条反比例函数$y = \frac{k}{x}$的图象上，若$0 < m < 3$，则n的取值范围是_____.

【答案】$n > 4$

【解析】

【分析】先根据点B的坐标求出反比例函数的k值，得到反比例函数解析式，再利用反比例函数的增减性，结合m的取值范围，得到n的取值范围．

【详解】解：点$B(3,4)$在反比例函数$y = \frac{k}{x}$的图象上，

$\therefore k = 3 \times 4 = 12$，

$\therefore$反比例函数解析式为$y = \frac{12}{x}$，

$k = 12 > 0$，

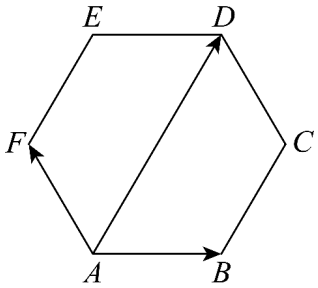
$\therefore$反比例函数$y=\frac{12}{x}$在第一象限内，y随x的增大而减小，

$\because$点$A(m,n)$在该反比例函数图象上，且$0<m<3$，

当$x=3$时，$y=4$，

$\therefore n>4$．

13. 如图，在正六边形$ABCDEF$中，$AF=a$，$AB=b$，用a、b表示AD的结果是_____．

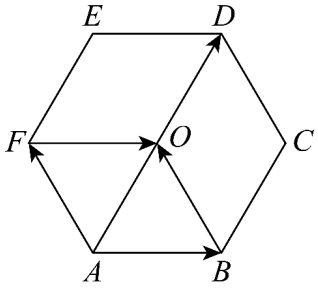


【答案】$2a+2b$

【解析】

【分析】根据正六边形的性质得到$AD=2AO$，再结合平行四边形法则得到$AO=AB+AF$，进而求出用a、b表示AD的结果．

【详解】解：如图，设正六边形的中点为O，连接FO，BO，



在正六边形中，$AB\parallel FO$、$AF\parallel BO$，且$AB=FO$、$AF=BO$，

$\therefore$四边形 $ABOF$ 是平行四边形，

根据向量加法的平行四边形法则，平行四边形的对角线向量等于两邻边向量之和：

$AO = AF + AB = a + b$，

$\therefore AD = 2AO = 2(a + b) = 2a + 2b$．

14. 某市 2024 年进出口集装箱 5.15×10^7 个，2025 年进出口集装箱 5.5×10^7 个，则 2025 年较 2024 年集装箱的进出口数量增加了_____．（用科学记数法表示）

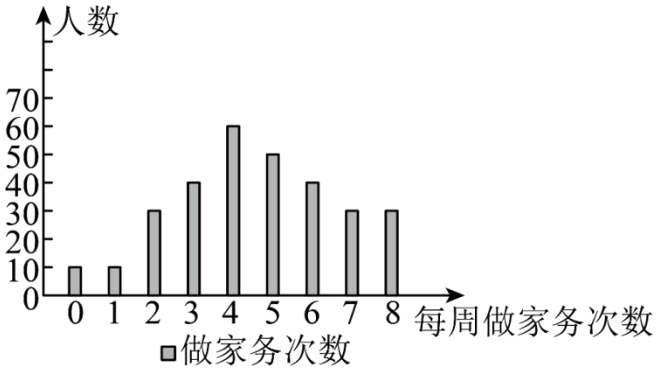
【答案】3.5×10^6

【解析】

【分析】用 2025 年进出口集装箱数量减去 2024 年的数量，将结果整理为符合要求的科学记数法的形式即可解答．

【详解】解：根据题意列算式计算得：$5.5 \times 10^7 - 5.15 \times 10^7 = (5.5 - 5.15) \times 10^7 = 0.35 \times 10^7 = 3.5 \times 10^6$．

15. 某区抽查 300 名学生每周做家务的次数，如图所示，据此可以推测全区 9000 名学生每周做家务次数大于 5 次的有_____人．



【答案】3000

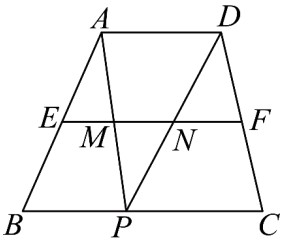
【解析】

【详解】解：由题意知，300 名学生每周做家务次数大于 5 次的有 $40 + 30 + 30 = 100$（人），

在 300 名学生中，每周做家务次数大于 5 次的学生占比为 $\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$，

据此可以推测全区 9000 名学生每周做家务次数大于 5 次的有 $9000\times\frac{1}{3}=3000$（人），

16. 如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，EF 是梯形的中位线，点 P 是边 BC 上一点，联结 AP、DP 分别交 EF 于点 M、N，若 $BC=2AD$，$S_{\triangle PMN}=1$，则梯形 $ABCD$ 的面积为_____.



【答案】12

【解析】

【分析】设梯形的高为 h，用 AD 表示出 MN 的长度，利用三角形面积公式求出 AD 与 h 的乘积，最后代入梯形面积公式计算即可求解.

【详解】解：设梯形 $ABCD$ 的高为 h

$\because EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线

$\therefore EF\parallel AD\parallel BC$，$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$，$EF$ 与 BC 之间的距离为 $\frac{h}{2}$

$\because BC=2AD$

$\therefore EF=\frac{1}{2}(AD+2AD)=\frac{3}{2}AD$

在 $\triangle ABP$ 中，E 为 AB 中点，$EM\parallel BP$

$\therefore EM=\frac{1}{2}BP$ 同理可得 $FN=\frac{1}{2}PC$

$\therefore MN=EF-EM-FN=\frac{3}{2}AD-\frac{1}{2}(BP+PC)=\frac{3}{2}AD-\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}AD-AD=\frac{1}{2}AD$

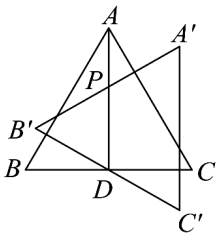
$\because S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot\frac{h}{2}=1$

$\therefore\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}AD\cdot h=1$

$\therefore AD\cdot h=8$

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}(AD+BC)h=\frac{1}{2}(3AD)h=\frac{3}{2}\times 8=12$.

17. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 BC 的中点，连接 AD，将 $\triangle ABC$ 绕点 D 旋转 α°（$0<\alpha<90$），得到 $\triangle A'B'C'$，边 $A'B'$ 交 AD 于点 P，当 $A'B'\perp AC$ 时，$\frac{AP}{PD}$ 的值为_____.



【答案】$\sqrt{3}-1$##$-1+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据等边三角形的性质得出 $AD\perp BC$，$\angle DAC=30^\circ$，结合 $A'B'\perp AC$ 求出 $\angle B'PD=60^\circ$，利用旋转的性质得到 $\angle B'=60^\circ$，$DB'=DB$，判定 $\triangle B'PD$ 为等边三角形，从而得出 $PD=DB$，最后在 $Rt\triangle ABD$ 中求出 AD 与 BD 的数量关系即可求解.

【详解】解：$\because\triangle ABC$ 是等边三角形，D 是 BC 的中点，

$\therefore AD \perp BC$，$\angle B = \angle BAC = 60^\circ$，$\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ$，

$\because A'B' \perp AC$，

$\therefore$在$Rt\triangle APE$（设$A'B'$交AC于点E）中，

$\angle APE = 90^\circ - \angle DAC = 60^\circ$

由旋转的性质可知$\triangle A'B'C \cong \triangle ABC$，

$\therefore \angle B' = \angle B = 60^\circ$，$DB' = DB$，

在$\triangle B'PD$中，$\angle B'PD = 60^\circ$，$\angle PB'D = 60^\circ$，

$\therefore \triangle B'PD$是等边三角形，

$\therefore PD = DB'$，

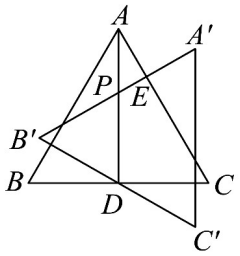
$\therefore PD = DB$，

在$Rt\triangle ABD$中，$\angle ADB = 90^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，

$\therefore AD = BD \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}BD$

$\therefore AP = AD - PD = \sqrt{3}BD - BD = (\sqrt{3} - 1)BD$，

$\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{(\sqrt{3} - 1)BD}{BD} = \sqrt{3} - 1$.



三、解答题（本大题共 7 小题，满分 82 分）

【请在答题纸相应位置写下相应步骤】

18. 计算：$\left(-\frac{1}{4}\right)^{0}+\left|\sqrt{3}-1\right|-\sqrt{48}+\frac{4}{\sqrt{3}-1}$.

【答案】$2-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查零指数幂、绝对值的性质、二次根式化简以及分母有理化的知识． 先分别化简每一项，再合并同类二次根式即可得到结果．

【详解】解：原式$=1+\sqrt{3}-1-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2$

$=(1-1+2)+\left(\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)$

$=2-\sqrt{3}$．

19. 解方程组：$\begin{cases}y^{2}-2x=7\\x-y=4\end{cases}$．

【答案】$\begin{cases}x=9\\y=5\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$

【解析】

【分析】本题使用代入消元法求解，先将一次方程变形，用含y的代数式表示x，再代入二次方程得到一元二次方程，求解后再回代求x的值．

【详解】解：$\begin{cases}y^{2}-2x=7①\\x-y=4②\end{cases}$

由②得$x=y+4③$

把③代入①得$y^{2}-2(y+4)=7$

整理得$y^{2}-2y-15=0$

因式分解得$(y-5)(y+3)=0$

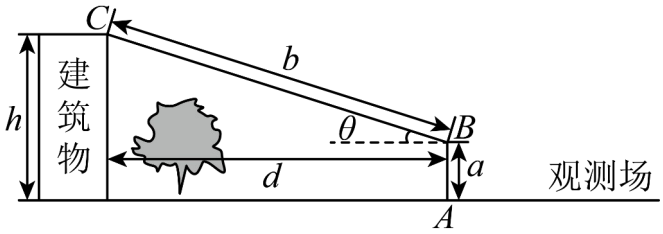
解得$y_1=5$，$y_2=-3$

把$y=5$代入③得$x=5+4=9$

把$y=-3$代入③得$x=-3+4=1$

∴原方程组的解是$\begin{cases}x=9\\y=5\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$.

20. 如图，小明正在确认某一建筑物与栏杆是否安全，栏杆AB与建筑物的底端处在同一水平面上，规定建筑物高度h与栏杆到建筑物的距离d满足$\frac{h}{d}<\frac{1}{8}$即为安全.



(1) 当$d=100$米时，h至少需要小于多少米?

(2) 若在观测场测得AB的长是a，BC的长为b，在B处观测C的仰角为θ，求$\frac{h}{d}$.（用含a、b、θ的代数式表示）

【答案】 (1) h至少需要小于12.5米

(2) $\frac{h}{d}=\frac{a+b\sin\theta}{b\cos\theta}$

【解析】

【分析】（1）将$d=100$代入$\frac{h}{d}<\frac{1}{8}$中，解得$h<12.5$，即可求解；

（2）过点B作建筑物的垂线，垂足为点D，则$BD=d$，$CD=h-a$，在$Rt\triangle BCD$中，

$\sin\theta=\frac{CD}{BC}=\frac{h-a}{b}$，$\cos\theta=\frac{BD}{BC}=\frac{d}{b}$，得到$h=a+b\sin\theta$，$d=b\cos\theta$，即可求解．

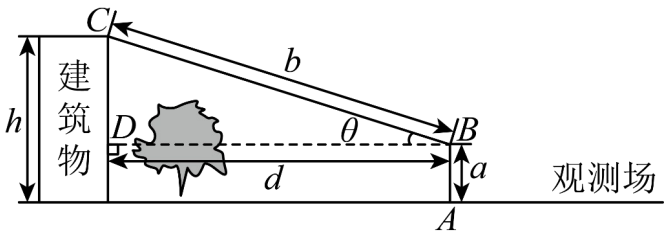
【小问1详解】

解：由题可知，当$d=100$米时，$\frac{h}{100}<\frac{1}{8}$，解得$h<12.5$，

$\therefore h$至少需要小于12.5米；

【小问2详解】

解：如图所示，过点B作建筑物的垂线，垂足为点D，则$BD=d$，$CD=h-a$，



在$Rt\triangle BCD$中，$\sin\theta=\frac{CD}{BC}=\frac{h-a}{b}$，$\cos\theta=\frac{BD}{BC}=\frac{d}{b}$，

$\therefore h=a+b\sin\theta$，$d=b\cos\theta$，

$\therefore \frac{h}{d}=\frac{a+b\sin\theta}{b\cos\theta}$．

21. 某景区通过自动扶梯将游客送往观景台，$8:10:00$时第一位游客站上扶梯，$8:10:51$时第一位游客到达观景台，此后的游客有序排队入场，每位游客到达时间的间隔为0.8秒．

（1）设登上观景台的游客数为x，时间为y（从$8:10:00$开始计时，单位为秒），请完成表格，并写出y关于x的函数解析式；（不用写定义域）

x	1	6
y		

表 1

（2）①请你求出从8点10分0秒整到8点12分0秒整，一共有几位游客到达观景台；

② 请你求出从8点12分0秒整到8点14分0秒整，一共有几位游客到达观景台．

【答案】（1）表格依次填入51，55；y关于x的函数解析式为$y=0.8x+50.2$

（2）①$87$位；②$150$位

【解析】

【分析】本题为一次函数实际应用问题，解题思路为：首先根据题意得到第一位游客到达的时间，结合游客到达间隔推出表格数据，再推导得到y关于x的一次函数解析式，最后根据不同时间段的总计时y的范围，结合x为正整数的性质，计算得到对应游客数量．用到的性质为一次函数的定义与一元一次不等式的求解．

【小问 1 详解】

解：由题意可知，第一位游客到达时间为从计时开始 51 秒．

所以当$x=1$时，$y=51$．

每位游客到达间隔为0.8秒，

当$x=6$时，$y=51+0.8\times(6-1)=55$．

$\because$ x位游客，第一位用时 51 秒，剩余$(x-1)$位每位间隔0.8秒，

$\therefore$ $y=51+0.8(x-1)=0.8x+50.2$

【小问 2 详解】

解：①从 8 点 10 分 0 秒整到 8 点 12 分 0 秒整，总计时 $y=120$ 秒．

令 $0.8x+50.2\le 120$

解得 $x\le 87.25$ x 为正整数，因此最大 $x=87$ ．

答：一共有 87 位游客到达观景台．

② 从 8 点 10 分 0 秒整到 8 点 14 分 0 秒整，总计时 $y=240$ 秒．

令 $0.8x+50.2\le 240$

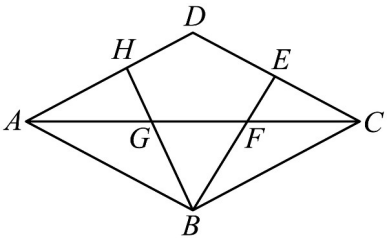
解得 $x\le 237.25$ x 为正整数，

因此到 8 点 14 分 0 秒整最多有 237 位游客到达．

该时间段游客数为 $237-87=150$ ．

答：一共有 150 位游客到达观景台．

22. 如图，菱形 $ABCD$ 中，E 是线段 CD 上的点，连接 BE 交对角线 AC 于点 F ，且 $\angle FBC=\angle CAB$ ．



（1）如果 $AF=2BF$ ，求证：$CE=DE$ ；

（2）如果 $\angle ABE$ 的角平分线交 AC 、AD 于点 G 、H ，求证：$CD\cdot BG=BH\cdot BF$ ．

【答案】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore \angle DAC = \angle DCA = \angle CAB = \angle BCA$，$AB = DC$，

$\because \angle FBC = \angle CAB$，

$\therefore \angle FBC = \angle BCA$，

$\therefore FB = FC$，

$\because AF = 2BF$，

$\therefore AF = 2CF$，

$\because AB \parallel DC$，

$\therefore \angle CEF = \angle ABF$，

$\because \angle EFC = \angle AFB$，

$\therefore \triangle AFB \sim \triangle CFE$，

$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{AB}{CE}$，即$\frac{AB}{CE} = 2$，

$\because AB = DC$，

$\therefore \frac{DC}{CE} = 2$，即$DC = 2CE$

故$CE = DE$．

（2）证明：$\because$ 据（1）可知$\angle FBC = \angle BCA$，

$\therefore \angle BFA = \angle FBC + \angle BCA = 2\angle FBC$，

$\because \angle FBC = \angle CAB$，

$\therefore \angle BFA = 2\angle CAB$，

$\because \angle DAC = \angle DCA = \angle CAB = \angle BCA$，$\angle BAH = \angle DAC + \angle CAB$，

$\therefore \angle BAH = 2\angle CAB$，

$\therefore \angle BFA = \angle BAH$，

$\because BH$ 平分 $\angle ABE$，

$\therefore \angle ABH = \angle GBF$，

$\therefore \triangle BFG \backsim \triangle BAH$，

$\therefore \dfrac{BF}{BA} = \dfrac{BG}{BH}$，

$\because BA = CD$，

$\therefore \dfrac{BF}{CD} = \dfrac{BG}{BH}$，

$\therefore CD \cdot BG = BH \cdot BF$.

【解析】

【分析】（1）利用菱形对角线平分内角，结合等角对等边得 $FB = FC$，由 $AF = 2BF$ 得到 $AF = 2CF$，再由 $AB \parallel CD$ 证 $\triangle AFB \backsim \triangle CFE$，推出 $AB = 2CE$，结合菱形边长相等证出 $CE = DE$；

（2）先通过 $\angle BFA = 2\angle FBC$ 与 $\angle FBC = \angle CAB$ 推导 $\angle BFA = \angle BAH$，结合角平分线得 $\angle ABH = \angle GBF$，证得 $\triangle BFG \backsim \triangle BAH$，写出相似比例式，用 $BA = CD$ 代换，变形得到乘积等式.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

23. 对于函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，对称轴与x轴交于点A，将点A向右平移一个单位得到点B，使点C与点B的横坐标相等，且点C的纵坐标为$2a$，则称点C为抛物线的“派生点”，并且将直线AC称为抛物线的“派生直线”．

（1）已知函数$y=2x^2+3$，求该函数的“派生直线”解析式；

（2）已知点C为某抛物线的“派生点”，点$P(1,m)$和$Q(7,n)$在其“派生直线”$y=2x-6$上，且点P是该抛物线与其“派生直线”的交点，求$\dfrac{PC}{CQ}$的值，并判断点Q是否在抛物线上．

【答案】 (1) $y=4x$

(2) $\dfrac{PC}{CQ}=1$，点Q在抛物线上

【解析】

【分析】（1）用待定系数法求一次函数解析式；

（2）先根据点在直线上的性质求出各点坐标，计算线段比，再求出抛物线解析式，代入点坐标验证点是否在抛物线上．

【小问 1 详解】

解：已知函数$y=2x^2+3$，可得$a=2$，$b=0$，二次函数对称轴为$x=-\dfrac{b}{2a}=0$，对称轴与x轴交点A坐标为$(0,0)$，

将A向右平移 1 个单位得到B，

B的横坐标为$0+1=1$，

根据定义，C横坐标为1，纵坐标为$2a=4$.即$C(1,4)$，

设派生直线AC解析式为$y=kx$，

代入$C(1,4)$得$k=4$.

因此该函数的派生直线解析式为$y=4x$.

【小问2详解】

解：由题意，A是派生直线$y=2x-6$与x轴的交点，A纵坐标为0，

将$y=0$代入$y=2x-6$得$0=2x-6$，

解得$x=3$，因此$A(3,0)$，

根据定义，B横坐标为$3+1=4$，因此C横坐标为4，

将$x=4$代入$y=2x-6$得$y=2$.

因此$C(4,2)$，

将$P(1,m)$代入$y=2x-6$得

$m=-4$，即$P(1,-4)$，

将$Q(7,n)$代入$y=2x-6$得$n=8$，即$Q(7,8)$，

$\therefore PC=\sqrt{(4-1)^2+(2-(-4))^2}=3\sqrt{5}$，$CQ=\sqrt{(7-4)^2+(8-2)^2}=3\sqrt{5}$，

$\therefore \frac{PC}{CQ}=\frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}=1$，

由定义，抛物线对称轴为$x=3$，

C纵坐标为$2a=2$，得

$a=1$，

设抛物线解析式为$y=(x-3)^2+k$，

$\because P(1,-4)$在抛物线上，代入得$-4=(1-3)^2+k$，

解得$k=-8$，

$\because$抛物线解析式为$y=(x-3)^2-8=x^2-6x+1$，

$\therefore$将$x=7$代入抛物线解析式得$y=7^2-6\times7+1=8$，与Q的纵坐标相等，

因此点Q在抛物线上.

24. 在半圆AOQ中，点O为圆心，线段AQ为直径，B、C是半圆上两点，D是AB上一点，连接AB、CD交于点P，且$AB=CD$.

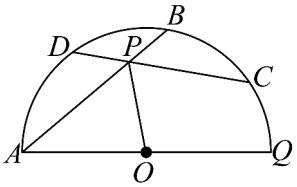


图1

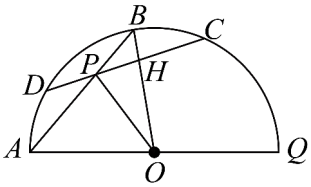


图2

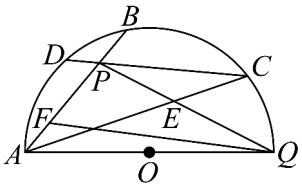


图3

(1) 如图1，连接OP；

① 求证：$\angle APO=\angle CPO$；

② 如图2，连接OB交弦CD于点H，若$AQ=4$，$PB=1$，$PO=HO$，求PH的长；

(2) 如图3，连接PQ、AC交于点E，线段AP上有一点F使得$PF=4AF$，若$PE=QE$，

$\angle PEA=\angle PFQ$，求$\dfrac{PE}{EA}$的值．

【答案】 (1) ①证明：如图，作$OG\perp AB$于G，$OZ\perp CD$于Z，连接OC，

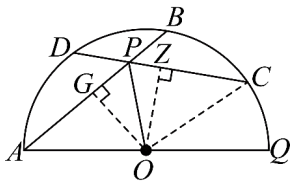


图1

$\therefore AG=\dfrac{1}{2}AB$，$CZ=\dfrac{1}{2}CD$，

$\because AB=CD$，

$\therefore AG=CZ$，

$\because OA=OC$，$\angle AGO=\angle CZO=90^{\circ}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OAG\cong\mathrm{Rt}\triangle OCZ(\mathrm{HL})$，

$\therefore OG=OZ$，

$\because \angle PGO=\angle PZO=90^{\circ}$，$OP=OP$，

$\therefore Rt\triangle OPG\cong Rt\triangle OPZ(HL)$，

$\therefore \angle APO=\angle CPO$；

②$PH=\dfrac{3}{4}$；

(2) $\dfrac{PQ}{AQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】（1）①作$OG \perp AB$于G，$OZ \perp CD$于Z，连接OC，利用垂径定理结合$AB=CD$，得出$AG=CZ$，证明$Rt\triangle OAG \cong Rt\triangle OCZ(HL)$，得出$OG=OZ$，再证明$Rt\triangle OPG \cong Rt\triangle OPZ(HL)$，即可求证；

②先证明$\angle APO=\angle OHP$，得出$\angle BPO=\angle BHP$，可得$\triangle BPH \backsim \triangle BOP$，则$\frac{BP}{OB}=\frac{BH}{BP}=\frac{PH}{OP}$，即可得出$BH=\frac{1}{2}$，$PH=\frac{1}{2}OP$，再求出$OH=OP=\frac{3}{2}$，即可求解；

（2）证明$\triangle FPQ \backsim \triangle EPA$，得出$\frac{PF}{PE}=\frac{PQ}{AP}$，设$PF=4AF=4m$，$PE=QE=n$，可得$AP=5m$，$\frac{4m}{n}=\frac{2n}{5m}$，求出$n=\sqrt{10}m$，连接$OP$，交$AC$于点$K$，由（1）可得$AP=CP$，$\angle APO=\angle CPO$，得出$OP \perp AC$，证明$K$为$\triangle APQ$的重心，得出$AK=2EK$，设$AK=2EK=2k$，在$Rt\triangle APK$和$Rt\triangle EPK$中，利用勾股定理列式求出$k=\sqrt{5}m$，可得$AK=2EK=2\sqrt{5}m$，即可求解．

【小问1详解】

解：①略；

②$\because PO=HO$，

$\therefore \angle OPH=\angle OHP$，

由（1）可知，$\angle OPC=\angle APO$，

$\therefore \angle APO=\angle OHP$，

$\because \angle BPO=180^\circ-\angle APO$，$\angle BHP=180^\circ-\angle OHP$，

$\therefore \angle BPO = \angle BHP$，

在$\triangle BPH$和$\triangle BOP$中，$\angle BPO = \angle BHP$，$\angle PBH = \angle OBP$，

$\therefore \triangle BPH \backsim \triangle BOP$，

$\therefore \dfrac{BP}{OB} = \dfrac{BH}{BP} = \dfrac{PH}{OP}$，

$\because AQ = 4$，

$\therefore OB = 2$，

$\because BP = 1$，

$\therefore \dfrac{BP}{OB} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{BH}{1} = \dfrac{PH}{OP}$，

$\therefore BH = \dfrac{1}{2}$，$PH = \dfrac{1}{2}OP$，

$\therefore OH = OP = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$，

$\therefore PH = \dfrac{3}{4}$；

【小问2详解】

解：$\because \angle PFQ = \angle PEA$，$\angle FPQ = \angle EPA$，

$\therefore \triangle FPQ \backsim \triangle EPA$，

$\therefore \dfrac{PF}{PE} = \dfrac{PQ}{AP}$，

$\because PF=4AF$，$PE=QE$，

设$PF=4AF=4m$，$PE=QE=n$，

则$AP=5m$，

$\therefore \dfrac{4m}{n}=\dfrac{2n}{5m}$，

$\therefore 20m^2=2n^2$，

$\therefore n=\sqrt{10}m$，

连接OP，交AC于点K，

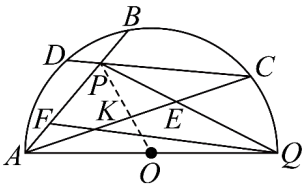


图3

由（1）①中$Rt\triangle OPG\cong Rt\triangle OPZ$可得$PG=PZ$（图1），

又$\because AG=CZ$（①已证），

$\therefore AG+PG=PZ+CZ$，

$\therefore AP=CP$，

又$\because \angle APO=\angle CPO$（①已证），

$\therefore OP\perp AC$，

$\therefore \angle AKP=\angle CKP=90^\circ$，

$\because O$为$\triangle APQ$边AQ的中点，E为$\triangle APQ$边PQ的中点，

$\therefore K$为$\triangle APQ$的重心，

$\therefore AK=2EK$，

设$EK=k$，则$AK=2EK=2k$，

$\because$在$Rt\triangle APK$和$Rt\triangle EPK$中，$PK^2=AP^2-AK^2=PE^2-EK^2$，

$\therefore (5m)^2-(2k)^2=\left(\sqrt{10}m\right)^2-k^2$，

化简得$k=\sqrt{5}m$（负值舍），

$\therefore AK=2EK=2\sqrt{5}m$，

$\therefore \dfrac{PE}{EA}=\dfrac{PE}{AK+EK}=\dfrac{\sqrt{10}m}{3\sqrt{5}m}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$．